# Teorema da Função Implícita e não-Existência de Limite de Funções de Várias Variáveis *

A. L. C. dos Santos ** e P. N. da Silva ‡‡

**Resumo**

Apresentamos um resultado que fornece um critério para a determinação da não-existência de limite de uma classe de funções de várias variáveis dadas por um quociente de funções com uma singularidade no ponto onde o limite será estudado. Na demonstração deste resultado, utilizamos o Teorema da Função Implícita.

## 1 Introdução

Ao longo deste trabalho, denotaremos por $\mathbf{x}$ um vetor do $\mathbb{R}^n$ de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, por $\mathbf{x}'$ o vetor de $\mathbb{R}^{n-1}$ de coordenadas $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, por $\mathbf{0}$ a origem de $\mathbb{R}^n$ e por $C_f(\alpha)$ o conjunto de nível $\alpha \in \mathbb{R}$ de uma função real de várias variáveis $f$, isto é

$$C_f(\alpha) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ f(\mathbf{x}) = \alpha\}.$$

Sejam $f$ e $g$ duas funções reais de classe $C^1$ definidas em um subconjunto aberto $A$ do $\mathbb{R}^n$ que contém a origem e suponha que $f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0}) = 0$. Dada uma vizinhança $\mathcal{V}$ da origem, se mostrarmos que existem $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{V}$ tais que

$$\frac{f(\mathbf{x}_1)}{g(\mathbf{x}_1)} = \gamma \qquad \text{e} \qquad \frac{f(\mathbf{x}_2)}{g(\mathbf{x}_2)} = \gamma + 1,$$

podemos concluir que o limite

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$$

não existe.

Nosso objetivo neste trabalho é estabelecer um resultado que dê condições suficientes para a não existência do limite acima sob algumas hipóteses sobre $f$ e $g$. Nosso argumento fará uso do Teorema da Função Implícita e das noções de Álgebra Linear de subespaço gerado, de dependência e independência linear e de dimensão.

Sejam $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. O conjunto $W$ de todos os vetores de $\mathbb{R}^n$ dados por combinações lineares dos vetores $v_1, \ldots, v_k$ é um subespaço vetorial e é denominado subespaço gerado por $v_1, \ldots, v_k$. Isto é,

$$W = \{w \in \mathbb{R}^n,\ v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k,\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n\}.$$

Dizemos que o conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente se a equação

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \mathbf{0}$$

* *Palavras chave:* Limites, Teorema da Função Implícita, Singularidades

** Departamento de Ciências Básicas e Gerais/CEFET–Maracanã, andre@pg.im.ufrj.br

‡‡ Departamento de Análise Matemática, IME/UERJ, nunes@ime.uerj.br

implica $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Caso contrário, dizemos que o conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente dependente.

A dimensão de $W$ é o menor natural $d \in \mathbb{N}$ tal que todo conjunto de vetores de $W$ com mais de $d$ elementos é um conjunto linearmente dependente é a dimensão de $W$.

# 2 Critério para a não-existência de limite

Nesta seção, apresentamos um resultado que fornece um critério para a determinação da não-existência de limite de uma certa classe de funções de várias variáveis.

**Teorema 1** *Sejam $f$ e $g$ duas funções reais de classe $C^1$ definidas em um subconjunto aberto $A$ do $\mathbb{R}^n$ que contém a origem. Considere o limite*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \tag{2.1}$$

*e suponha que $C_f(0) \cap C_g(0) = \{\mathbf{0}\}$ em uma vizinhança da origem. Se o subespaço gerado por $\{\nabla f(\mathbf{0}),\ \nabla g(\mathbf{0})\}$ tem dimensão um ou dois, então o limite em (2.1) não existe.*

*Prova:* Seja $m$ um inteiro não nulo. Defina

$$F_m(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) - 2m\lambda g(\mathbf{x}), & \text{se } \nabla f(\mathbf{0}) = \lambda \nabla g(\mathbf{0}) \text{ com } \lambda \neq 0 \\ f(\mathbf{x}) - mg(\mathbf{x}), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

É fácil ver que $\nabla F_m(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ se $\nabla f(\mathbf{0}) = \lambda \nabla g(\mathbf{0})$. Por outro lado, como o subespaço gerado por $\{\nabla f(\mathbf{0}),\ \nabla g(\mathbf{0})\}$ tem dimensão um ou dois, resta analisarmos os casos em que o conjunto $\{\nabla f(\mathbf{0}),\ \nabla g(\mathbf{0})\}$ é linearmente independente ou apenas um dos vetores de $\{\nabla f(\mathbf{0}),\ \nabla g(\mathbf{0})\}$ é o vetor nulo. Novamente, teremos $\nabla F_m(\mathbf{0}) = \nabla f(\mathbf{0}) - m\nabla g(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$.

Portanto, a menos de uma reordenação das variáveis, podemos supor que $\dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}(\mathbf{0}) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função $h_m : A_m \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, com $A_m$ um aberto do $\mathbb{R}^{n-1}$ que contém a origem, tal que $h_m(\mathbf{0}') = 0$ e $F_m(\mathbf{x}', h_m(\mathbf{x}')) = 0,\ \forall \mathbf{x}' \in A_m$.

Vamos verificar que a função $g(\mathbf{x}', h_m(\mathbf{x}'))$ não pode estar contida no conjunto de nível zero de $g$. De fato, se $g(\mathbf{x}', h_m(\mathbf{x}')) \equiv \mathbf{0}$, teríamos

$$0 \equiv F_m(\mathbf{x}', h_m(\mathbf{x}')) = f(\mathbf{x}', h_m(\mathbf{x}')), \quad \forall \mathbf{x}' \in A_m$$

contrariando a hipótese $C_f(0) \cap C_g(0) = \{\mathbf{0}\}$ em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^n$.

Logo, para toda vizinhança $\mathcal{V}$ de $\mathbf{0}$, podemos determinar $\mathbf{x}'_{v_m}, \mathbf{x}'_{v_{m+1}} \in A_m \cap A_{m+1}$ tais que

$$(\mathbf{x}'_{v_m}, h_m(\mathbf{x}'_{v_m})),\ (\mathbf{x}'_{v_{m+1}}, h_m(\mathbf{x}'_{v_{m+1}})) \in \mathcal{V},$$
$$g(\mathbf{x}'_{v_m}, h_m(\mathbf{x}'_{v_m})) \neq 0 \qquad \text{e} \qquad g(\mathbf{x}'_{v_{m+1}}, h_m(\mathbf{x}'_{v_{m+1}})) \neq 0.$$

Portanto,

$$\frac{f(\mathbf{x}'_{v_m}, h_m(\mathbf{x}'_{v_m}))}{g(\mathbf{x}'_{v_m}, h_m(\mathbf{x}'_{v_m}))} = m \qquad \text{e} \qquad \frac{f(\mathbf{x}'_{v_{m+1}}, h_{m+1}(\mathbf{x}'_{v_{m+1}}))}{g(\mathbf{x}'_{v_{m+1}}, h_{m+1}(\mathbf{x}'_{v_{m+1}}))} = m+1.$$

Conseqüentemente, o limite

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$$

não existe.

$\blacksquare$

**Observação 2.1** *Se $f$ e $g$ são funções reais de classe $C^1$ definidas em um subconjunto aberto $A$ do $\mathbb{R}^n$ que contém $\mathbf{x}_0$, $C_f(0) \cap C_g(0) = \{\mathbf{x}_0\}$ em uma vizinhança de $\mathbf{x}_0$ e o subespaço gerado por $\{\nabla f(\mathbf{x}_0),\, \nabla g(\mathbf{x}_0)\}$ tem dimensão um ou dois. Consideremos o limite*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}. \tag{2.2}$$

*A mudança de variável $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ permite que o reescrevamos na forma*

$$\lim_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{u}+\mathbf{x}_0)}{g(\mathbf{u}+\mathbf{x}_0)}.$$

*Sejam $\widetilde{f}(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}+\mathbf{x}_0)$ e $\widetilde{g}(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u}+\mathbf{x}_0)$. Podemos reescrever limite acima da seguinte maneira*

$$\lim_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}} \frac{\widetilde{f}(\mathbf{u})}{\widetilde{g}(\mathbf{u})}. \tag{2.3}$$

*As hipóteses feitas sobre $f$ e $g$ garantem que $\widetilde{f}$ e $\widetilde{g}$ são funções reais de classe $C^1$ definidas em um subconjunto aberto $\widetilde{A} = A - \mathbf{x}_0 = \{\mathbf{a} - \mathbf{x}_0,\ \mathbf{a} \in A\}$ do $\mathbb{R}^n$ que contém a origem, $C_{\widetilde{f}}(0) \cap C_{\widetilde{g}}(0) = \{\mathbf{0}\}$ em uma vizinhança de oridem e o subespaço gerado por $\{\nabla \widetilde{f}(\mathbf{0}),\, \nabla \widetilde{g}(\mathbf{0})\}$ tem dimensão um ou dois. De fato, como*

$$\alpha_1 \nabla \widetilde{f}(\mathbf{0}) + \alpha_2 \nabla \widetilde{g}(\mathbf{0}) = \alpha_1 \nabla f(\mathbf{x}_0) + \alpha_2 \nabla g(\mathbf{x}_0),$$

*a dimensão do subespaço gerado por $\{\nabla \widetilde{f}(\mathbf{0}),\, \nabla \widetilde{g}(\mathbf{0})\}$ é igual à dimensão do subespaço gerado por $\{\nabla f(\mathbf{x}_0),\, \nabla g(\mathbf{x}_0)\}$. Logo, pelo Teorema 1, o limite em (2.3) não existe. Conseqüentemente, o limite em (2.2) não existe.*

# 3 Conclusão

O Teorema 1 nos diz que se $C_f(0) \cap C_g(0) = \{\mathbf{0}\}$ em uma vizinhança da origem e os vetores $\nabla f(\mathbf{0})$ e $\nabla g(\mathbf{0})$ não se anulam simultaneamente, então o limite

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$$

não existe.

Vamos ilustrar com alguns exemplo a aplicação deste resultado bem como verificar que o caso em que os vetores $\nabla f(\mathbf{0})$ e $\nabla g(\mathbf{0})$ se anulam simultaneamente é inconclusivo. Além disso, veremos que há exemplos em que a hipótese $C_f(0) \cap C_g(0) \neq \{\mathbf{0}\}$ não é satisfeita e o limite que estamos analisando existe.

Consideremos o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x-y}.$$

Consideremos $f(x,y) = x^3+y^3$ e $g(x,y) = x-y$. A dimensão do subespaço gerado por $\{\nabla f(0,0),\ \nabla g(0,0)\} = \{(0,0),(1,-1)\}$ é um. Logo, o Teorema 1 garante que o limite acima não existe. Convém ressaltar que a maneira mais usual de mostrar que este limite não existe consiste em determinar duas curvas que passam pela origem e são tais que o limite acima calculado ao longo de tais curvas resulta em valores distintos. No entanto, neste caso, tal tarefa traz certas dificuldades.

Vejamos um outro exemplo desta mesma natureza. Consideremos o limite

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(x-2)^2+(y-1)^2}{x+y-3}.$$

Consideremos $f(x,y) = (x-2)^2+(y-1)^2$ e $g(x,y) = x+y-3$ A dimensão do subespaço gerado por $\{\nabla f(2,1),\ \nabla g(2,1)\} = \{(0,0),(1,1)\}$ é um. Logo, a Observação 2.1 garante que o limite acima não existe.

Vejamos agora que, sem a hipótese $C_f(0)\cap C_g(0) = \{\mathbf{0}\}$, não podemos garantir a não-existência do limite

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}.$$

Consideremos $f(x,y) = (x-y)^2$ e $g(x,y) = x-y$. A dimensão do subespaço gerado por $\{\nabla f(0,0),\ \nabla g(0,0)\} = \{(0,0),(1,-1)\}$ é um e $C_f(0)\cap C_g(0) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x=y\} \neq \{(0,0)\}$. No entanto, o limite acima existe.

Finalmente, vejamos que o caso $\nabla f(\mathbf{0}) = \nabla g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ é inconclusivo.

Consideremos $f(x,y) = xy$ e $g(x,y) = x^2+y^2$. Temos $\nabla f(0,0) = \nabla g(0,0) = (0,0)$ e $C_f(0)\cap C_g(0) = \{(0,0)\}$ e o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

não existe.

Por outro lado, se $f(x,y) = x^3+y^3$ e $g(x,y) = x^2+y^2$. Temos $\nabla f(0,0) = \nabla g(0,0) = (0,0)$ e $C_f(0)\cap C_g(0) = \{(0,0)\}$ e o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

existe.