

SINGULARIDADES E NÃO-EXISTÊNCIA DE LIMITE DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS *

P. N. DA SILVA **

Resumo

Nestas notas, de caráter didático, apresentamos e justificamos uma técnica para a determinação da não-existência de limite para uma certa classe de funções de duas variáveis. Supomos que um elemento desta classe é uma função racional que apresenta uma singularidade no ponto onde o limite será estudado. Exploraremos esta singularidade para a determinação de curvas que passam pelo ponto em questão e sejam tais que o comportamento da função é diferente quando nos aproximamos deste ponto, ao longo destas curvas. Veremos que a técnica apresentada é bastante útil em exemplos em que a escolha destas curvas não é muito evidente. Na verdade, foi exatamente um destes problemas que a motivou.

1 Introdução

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e (x_0, y_0) um ponto de acumulação de A . Denotemos por I um intervalo e por $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva contínua em t_0 , tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$. Para determinar a não-existência do limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y),$$

o seguinte resultado é bastante útil:

Proposição 1 *Suponha que*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \in \mathbb{R},$$

que $\gamma(t) \neq (x_0, y_0)$ para todo $t \neq t_0$ e que $\gamma(t) \in A$, para todo $t \neq t_0$. Então,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t)) = L.$$

Este resultado nos diz que, para provar que o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

não existe, basta determinarmos duas curvas γ_1 e γ_2 que satisfaçam às hipóteses da Proposição 1 e sejam tais que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_2(t)).$$

Estas notas estão justamente relacionadas à análise de limites que trazem certas dificuldades na determinação de duas curvas com as propriedades acima. A idéia que desenvolveremos no decorrer

*Palavras chave: Limites, Singularidades

**Departamento de Análise Matemática, IME/UERJ, nunes@ime.uerj.br

deste texto surgiu quando tivemos que resolver um destes problemas. Por isso, em nossa apresentação, vamos refazer nosso percurso original. Na próxima seção analisaremos o limite que inicialmente nos trouxe dificuldades e o procedimento adotado para contorná-las. Na última seção, generalizaremos este procedimento, caracterizando uma classe de funções para a qual este procedimento pode ser útil.

2 Problema Original

Consideremos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y}. \quad (2.1)$$

É fácil verificar que a função racional $\frac{x^3}{x^2 + y}$ tende a zero quando nos aproximamos da origem ao longo de curvas do tipo $y = x^k$. Por outro lado, também temos pistas para identificar que o limite acima não existe. De fato, observe que o denominador de f se anula ao longo da curva $\gamma(x) = (x, -x^2)$. Além disso, ainda ao longo desta curva, o numerador de f só se anula quando $x = 0$. Claramente, isto nos diz que tal função se torna ilimitada em qualquer vizinhança da origem. Conseqüentemente, não é possível que o limite acima exista. Para justificar este fato, de acordo com a Proposição 1, basta encontrarmos uma curva ao longo da qual o valor limite de f quando (x,y) se aproxima da origem seja diferente de zero. Vamos tentar uma curva da forma $\gamma(x) = (x, y(x)) = (x, \alpha(x) - x^2)$ com $\alpha(x) \neq 0$. Temos

$$f(x, \alpha(x) - x^2) = \frac{x^3}{\alpha(x)}.$$

Como queremos que $\gamma(x) = (x, \alpha(x) - x^2)$ se aproxime da origem quando x tender a zero, a escolha de $\alpha(x)$ deve ser tal que $\lim_{x \rightarrow 0} (\alpha(x) - x^2) = 0$. Por outro lado, queremos que o quociente $\frac{x^3}{\alpha(x)}$ não se aproxime de zero. Para tanto, podemos escolher, por exemplo, $\alpha(x) = x^3$. Temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, x^3 - x^2) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^3} = 1.$$

Na próxima seção, vamos generalizar o procedimento adotado para a análise do limite (2.1). Antes, vamos identificar qual foi a idéia central utilizada ao tentarmos encontrar uma curva da forma $\gamma(x) = (x, \alpha(x) - x^2)$.

Observe que tal alternativa nada mais é do que uma perturbação da curva $(x, -x^2)$. Como f era tal que seu denominador se anulava ao longo de todas estas curvas e seu numerador somente em um ponto (justamente aquele em que queremos calcular o limite), ela seria a candidata “ideal”. Infelizmente, sua imagem não está contida no domínio de f . Por isso, tentamos uma curva que seja “semelhante” à curva $(x, -x^2)$. Consideramos uma perturbação desta curva da forma $\gamma(x) = (x, \alpha(x) - x^2)$. Tivemos que fazer algumas restrições sobre $\alpha(x)$. Primeiramente, não queríamos que o denominador se anulasse fora da origem. Exigimos então que $\alpha(x) \neq 0$ para $x \neq 0$. Além disso, para satisfazer às hipóteses da Proposição 1, era necessário que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \gamma(x) = (0,0)$$

e que o quociente que define f não se aproximasse de zero ao longo da curva γ .

3 Generalização

As considerações feitas no final da seção anterior vão ser úteis para determinar uma classe de funções para a qual o procedimento adotado na seção anterior possa ser útil.

Vamos considerar uma classe de funções racionais com as seguintes propriedades:

1. $f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$, $p, q : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se anulam em (x_0, y_0) .
2. A função $q = q(x, y)$ se anula ao longo de uma curva contínua γ que passa pelo ponto (x_0, y_0) e, ao longo desta curva, $p = p(x, y)$ só se anula no ponto (x_0, y_0) . Isto é,

$$\gamma(t_0) = (x_0, y_0), \quad q(\gamma(t)) = 0 \quad \text{e} \quad p(\gamma(t)) \neq 0, \quad \forall t_0 \neq t \in I.$$

3. Existe uma curva que satisfaz às hipóteses da Proposição 1 ao longo da qual a função tende a zero em uma pequena vizinhança de (x_0, y_0) .

Observação 3.1 *Antes de prosseguirmos, vejamos que não há perda de generalidade em supor que f se aproxime de zero ao longo de alguma curva. Caso f satisfizesse aos itens 1 e 2 e existisse uma curva ao longo da qual a função tendesse a $L \neq 0$, em uma pequena vizinhança de (x_0, y_0) , consideraríamos*

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y) - L = \frac{p(x, y) - q(x, y)L}{q(x, y)} = \frac{\tilde{p}(x, y)}{\tilde{q}(x, y)}.$$

E pelos itens 1 e 2, temos

1. $\tilde{f}$ é uma função racional tal que $\tilde{p}, \tilde{q} : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que se anulam em (x_0, y_0) .
2. A função $\tilde{q} = \tilde{q}(x, y)$ se anula ao longo de uma curva contínua γ , que passa pelo ponto (x_0, y_0) e, nesta curva, $\tilde{p} = \tilde{p}(x, y)$ só se anula no ponto (x_0, y_0) . Isto é,

$$\gamma(t_0) = (x_0, y_0), \quad \tilde{q}(\gamma(t)) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{p}(\gamma(t)) \neq 0, \quad \forall t_0 \neq t \in I.$$

Por outro lado, podemos afirmar que existe uma curva que satisfaz às hipóteses da Proposição 1 ao longo da qual a função tende a zero quando nos aproximamos de (x_0, y_0) . De fato, por hipótese, existe uma curva contínua $\beta = \beta(t)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \beta(t) = (x_0, y_0), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f(\beta(t)) = L \quad \text{e} \quad \text{Im}(\beta(t)) \subset A, \quad \forall t_0 \neq t \in I.$$

Esta última propriedade garante que $q(\beta(t)) \neq 0$ para todo $t \neq t_0$. Logo,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \tilde{f}(\beta(t)) = \left[\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\tilde{p}(\beta(t))}{\tilde{q}(\beta(t))} \right] \left[\lim_{t \rightarrow t_0} [f(\beta(t)) - L] \right] = 0.$$

Voltemos à generalização. Novamente, o item 2, permite concluir que o limite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$$

não existe. Pela Proposição 1 e pelo item 3, basta determinar uma curva ao longo da qual a função não tenda a zero, quando nos aproximamos de (x_0, y_0) .

Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ dada pelo item 2. Para explorar a singularidade de f , procuramos uma curva da forma $\beta(t) = (x(t), y(t) + \alpha(t))$, com $\alpha(t) \neq 0$. Isto é, consideramos uma perturbação de γ . Calculamos a função f na curva $\beta(t)$ e, através de uma análise de $f(\beta(t))$, determinamos uma expressão conveniente para α de modo que a curva β satisfaça às hipóteses da Proposição 1 e não seja uma das curvas que satisfazem ao item 3.

Apenas para ilustrar, consideraremos o seguinte exemplo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x - y}.$$

Se $\delta(x) = (x, -x)$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x, -x) = (0, 0) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^3}{2x} = 0.$$

Além disso, a curva $\gamma(x) = (x, x)$ satisfaz o item 2. Se consideramos $\beta(x) = (x, x + \alpha(x))$, então

$$f(\beta(x)) = \frac{x^3 + (x + \alpha(x))^3}{-\alpha(x)} = -\frac{x^3}{\alpha(x)} - \frac{(x + \alpha(x))^3}{\alpha(x)}.$$

Se $\alpha(x) = x^3$, $x \in (-1, 1)$, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \beta(x) = (0, 0), \quad \beta((-1, 1)) \subset \text{Dom}(f) \quad \text{e} \quad \alpha(x) \neq 0, \quad \forall 0 \neq x \in (-1, 1).$$

Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(\beta(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-1 - \frac{x^3(1+x^2)^3}{x^3} \right] = -2.$$

Para finalizar, vamos analisar, através de um exemplo, a aplicação destes procedimentos para funções de mais do que duas variáveis. Veremos que este processo pode ser adaptado, ainda que fique um pouco mais trabalhoso e exija algumas modificações. Fica o desafio de se obter uma generalização e de se determinar alguma classe de funções para a qual tal generalização seja útil.

Analisemos o seguinte exemplo:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 - z}.$$

Se $\beta(x) = (0, x, x)$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (0, x, x) = (0, 0, 0) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(0, x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x(x-1)} = 0.$$

A curva $\gamma(x) = (x, x, 2x^2)$ satisfaz o item 2. Se consideramos $\beta(x) = (x, x + \alpha_1(x), 2x^2 + \alpha_2(x))$, $x \in (-1, 1)$. Então

$$f(\beta(x)) = \frac{x(x + \alpha_1(x))(2x^2 + \alpha_2(x))}{x^2 + (x + \alpha_1(x))^2 - (2x^2 + \alpha_2(x))}$$

Fazendo $\alpha_1(x) = 0$, temos

$$f(\beta(x)) = \frac{x(x + \alpha_1(x))(2x^2 + \alpha_2(x))}{2x^2 - (2x^2 + \alpha_2(x))} = -\frac{x(x + \alpha_1(x))(2x^2 + \alpha_2(x))}{\alpha_2(x)},$$

e, fazendo $\alpha_2(x) = 2x^4$, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \beta(x) = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_2(x) \neq 0, \quad \forall 0 \neq x \in (-1, 1).$$

Então,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(\beta(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{2x^4}{\alpha_2(x)} - \frac{x^2 \alpha_2(x)}{\alpha_2(x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-1 - x^2) = -1. \end{aligned}$$

