

Otimização da frequência no sistema de transporte público por ônibus considerando incertezas na demanda

Joyce Azevedo Caetano¹, Francisco Glaubos Nunes Clímaco^{1,2}, Glaydston Mattos Ribeiro¹, Laura Bahiense^{1,3}

¹Programa de Engenharia de Transportes
Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa em Engenharia – COPPE
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

²Departamento de Informática – DEINF
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

³Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa em Engenharia – COPPE
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

joyceazevedo@pet.coppe.ufrj.br, glaubosclimaco@pet.coppe.ufrj.br,
glaydston@pet.coppe.ufrj.br, laura@pet.coppe.ufrj.br

Abstract. *Public transportation follows a plan sensitive to changes, susceptible to influences such as traffic, weather, unplanned interruptions, policies, and fluctuations in demand. This study incorporates uncertainties in passenger numbers into an optimization model to determine bus line frequencies, aiming to mitigate operational, environmental, and social costs. Computational tests on a bus network considered three demand scenarios, probabilities of occurrence, and risk aversion. The results indicate precise solutions, safeguarding the system against passenger overload and reducing operational costs in the worst-case scenario by balancing the sustainable dimensions.*

Resumo. *O transporte público segue um plano sensível a mudanças, podendo ser afetado por tráfego, clima, interrupções não planejadas, políticas e flutuações na demanda. Este estudo incorpora incertezas no número de passageiros em um modelo de otimização para determinar a frequência de linhas de ônibus, visando mitigar custos operacionais, ambientais e sociais. Testes computacionais em uma rede de ônibus consideraram três cenários de demanda, probabilidades de ocorrência e aversão ao risco. Os resultados indicam soluções precisas, protegendo o sistema contra sobrecarga de passageiros e reduzindo custos operacionais no pior cenário ao equilibrar as dimensões sustentáveis.*

1. Introdução

Uma das principais ações que compõem o *design* de trânsito, mais especificamente no domínio das operações do transporte público, é a determinação da frequência. O número de partidas em uma rota depende não somente dos recursos disponíveis (quantidade de

veículos na frota, mão de obra etc.), mas também da rentabilidade das atividades e do nível de qualidade a que os passageiros são submetidos ao ingressar no sistema.

Pode-se afirmar que a complexidade do transporte público reside em garantir a constância das operações sem colocar em risco a segurança econômica e o bem-estar coletivo, prezando pela manutenção da demanda. Se esses aspectos forem negligenciados, é mais provável que o sistema se torne ineficiente e que os passageiros optem por outros meios de transporte. Isso, por sua vez, pode resultar em maior congestionamento, criando um ciclo negativo de fragilidade [Dakic *et al.* 2021, Herbon e Hadas 2015, Liu *et al.* 2020, Ortúzar e Willumsen 2011].

O comportamento dos passageiros ao longo do sistema e a oferta de capacidade de transporte podem flutuar ao longo do tempo, sendo essa incerteza um dos principais desafios na programação das viagens [Gkiotsalitis e Alesiani 2019]. Essa oscilação se manifesta por possíveis interrupções no desempenho dos transportes urbanos que impactam a operação dos serviços. Dentre as causas, podem-se citar: condições de tráfego (acidentes de trânsito, obras na via etc.); condições meteorológicas (chuvas intensas, neblina e outros fenômenos naturais); interrupções não planejadas (problemas mecânicos, falhas de sinalização e outras questões técnicas); e flutuações na demanda (presença de eventos como partidas esportivas e concertos); dentre outros.

Em geral, ao tentar equilibrar diversos cenários e, especialmente, reduzir os custos operacionais, os recursos empregados, sejam tangíveis ou não, acabam sendo inferiores aos ideais ou superestimados. Então, quando um planejamento é feito desconsiderando possíveis interrupções das atividades, a frequência pode se tornar inadequada, afetando o dimensionamento da frota, a satisfação dos usuários e os custos totais do sistema. O presente artigo está interessado nessa temática, em particular nas incertezas de demanda no transporte público por ônibus.

Dados da NTU (2023) mostram que cerca de 85,7% das viagens de transporte coletivo, no contexto nacional brasileiro, são realizadas por ônibus. Para mais, quando otimizado corretamente, o deslocamento por ônibus contribui para a promoção da mobilidade sustentável – redução de emissões, maior eficiência operacional e econômica e qualidade de vida [GVBus 2024]. Esta pesquisa foca, portanto, no desenvolvimento e aplicação de um modelo de otimização robusta para este modo. O objetivo é definir a frequência das linhas considerando diferentes níveis de demanda para redução dos custos operacionais, ambientais e sociais. Este estudo traz como contribuição à literatura um método que inclua incertezas à formulação sob a ótica da sustentabilidade.

Este artigo segue a seguinte estrutura. Na Seção 2, destaca-se parte da literatura sobre configuração de frequência em transporte público, com ênfase na abordagem robusta. A Seção 3 descreve o modelo matemático proposto. Na Seção 4, apresenta-se os dados dos experimentos computacionais e os resultados. Por fim, a Seção 5 discorre sobre as considerações finais e as sugestões para trabalhos futuros.

2. Revisão da Literatura

Problemas em aplicações práticas frequentemente envolvem incertezas e desconsiderá-las pode levar a soluções inviáveis [Mulvey *et al.* 1995, Ben-Tal *et al.* 2009, Carvalho 2023]. Comumente, essas incertezas estão relacionadas a variáveis como demanda, oferta e custos de transporte, que podem mudar em condições específicas. Em transportes, um

sistema robusto pode ser interpretado como aquele capaz de lidar com mudanças sem a necessidade de adaptações [Ge *et al.* 2022] ou com ajustes mínimos.

Pode-se encontrar na literatura diferentes propostas de modelos matemáticos que abordam a configuração de frequência no transporte público por ônibus. A Tabela 1 destaca um conjunto de publicações categorizadas com base nas principais métricas utilizadas para se referir às dimensões sustentáveis. Contudo, nem todas as pesquisas listadas abordam incertezas, seja na demanda ou em outro elemento que provoque possíveis interrupções.

Tabela 1. Estudos sobre a configuração de frequência de ônibus.

| Referência | OC | EC | TT | WT | DI | TR | FA | Incerteza |
|------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|-----------|
| Agrawal <i>et al.</i> (2020) | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | | | |
| Alkheder <i>et al.</i> (2018) | ✓ | | | | | | | |
| Amoroso <i>et al.</i> (2010) | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | |
| Arbex e Cunha (2015) | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | | |
| Baghoussi <i>et al.</i> (2018) | | | ✓ | ✓ | | | | ✓ |
| Blum e Mathew (2012) | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | | |
| Caetano <i>et al.</i> (2022) | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | |
| Cats e Gluck (2019) | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | |
| Chen <i>et al.</i> (2020) | ✓ | | | ✓ | ✓ | | | ✓ |
| Chien <i>et al.</i> (2010) | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | | |
| Cyril <i>et al.</i> (2020) | | | ✓ | ✓ | | | ✓ | |
| Dakic <i>et al.</i> (2021) | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | | |
| dell’Olio <i>et al.</i> (2012) | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | |
| Durán-Micco e Vansteenwegen (2022) | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | |
| Giesen <i>et al.</i> (2016) | ✓ | | ✓ | ✓ | | | | |
| Gkiotsalitis e Alesiani (2019) | ✓ | | ✓ | ✓ | | | | ✓ |
| Gkiotsalitis e Cats (2018) | ✓ | | ✓ | ✓ | | | | ✓ |
| Hadas e Shnaiderman (2012) | ✓ | | ✓ | | | | | ✓ |
| Hatzenbühler <i>et al.</i> (2020) | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | |
| Herbon e Hadas (2015) | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | |
| Jha <i>et al.</i> (2019) | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | | |
| Lemus-Romani <i>et al.</i> (2021) | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | | |
| Liang <i>et al.</i> (2021) | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | | |
| Liu <i>et al.</i> (2020) | ✓ | | ✓ | ✓ | | | | |
| Liu <i>et al.</i> (2022) | | | | ✓ | ✓ | | | ✓ |
| Maureira e Codina (2020) | ✓ | | ✓ | ✓ | | | | |
| Pathak <i>et al.</i> (2020) | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | | | |
| Peña <i>et al.</i> (2019) | ✓ | | | ✓ | ✓ | | | |
| Sadrani <i>et al.</i> (2022) | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | | | ✓ |
| Tekin <i>et al.</i> (2018) | ✓ | | ✓ | | | | | |
| Ulusoy e Chien (2015) | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | | |
| Verbas e Mahmassani (2015) | ✓ | | ✓ | ✓ | | | ✓ | |

Legenda: OC – Custos operacionais (dimensão econômica); EC – Custos ambientais (dimensão ambiental); TT – Tempo de viagem (dimensão social); WT – Tempo de espera (dimensão social); DI – Desconforto em

função da lotação do veículo (dimensão social); TR – Transferências (dimensão social); FA – Bilhete/passagem (dimensão social).

Entre as pesquisas com abordagens robustas, ou seja, menos sensíveis aos dados, destaca-se o estudo de Hadas e Shnaiderman (2012). Os autores propõem uma abordagem estocástica para lidar com a minimização do custo de assentos não ocupados e sobrecarga de demanda. Utilizando distribuições de probabilidade para tempos de viagem e número de passageiros, um modelo de otimização determina a frequência e o tamanho dos veículos a serem alocados.

Outro método relevante é apresentado por Baghoussi *et al.* (2018), que propuseram um modelo para aprimorar os horários dos ônibus na cidade do Porto, Portugal. Neste caso, a abordagem associa a robustez à tolerância para atrasos, com o objetivo de minimizar uma função que pondera chegadas antecipadas e tardias.

Em Gkiotsalitis e Cats (2018), propõe-se um modelo não linear para determinar o intervalo ideal entre partidas, considerando variações na demanda e tempos de viagem e espera. Os experimentos destacam a precisão do método e seu potencial para aprimorar a prestação de serviços, incorporando confiabilidade. Contudo, essa melhoria é avaliada individualmente para cada rota, sem considerar a integração na rede. Em pesquisa subsequente, Gkiotsalitis e Alesiani (2019) otimizam cronogramas a partir de incertezas no tempo de viagem e no número de passageiros, visando maximizar a regularidade do serviço e evitar impactos negativos na duração da viagem. No entanto, aspectos importantes, como perspectiva ambiental, desconforto, transferência e tarifa, ficam ausentes na análise.

Os autores de Chen *et al.* (2020) desenvolvem um modelo robusto para minimização dos custos operacionais, tempo de viagem e aglomeração em ônibus. Utilizando técnicas de aprendizado de máquina, busca-se soluções que considerem precisão de curto prazo, reduzindo incertezas, e estendendo a aplicação para cenários futuros a longo prazo. Em Liu *et al.* (2022), apresenta-se um modelo robusto para a programação dinâmica de ônibus. Consideram diferentes taxas de chegada de passageiros em cenários de fluxo variados representando a incerteza. O objetivo central da pesquisa é aumentar a satisfação da demanda, assegurando eficiência e confiabilidade no serviço.

Um modelo que avalia o desconforto de aglomeração em cada ônibus é proposto em Sadrani *et al.* (2022). O objetivo é encontrar a frequência e o tamanho ideais dos veículos para minimizar os custos totais do serviço de transporte público, considerando custos sociais e econômicos. Uma análise de sensibilidade é realizada para avaliar incertezas relacionadas ao tempo de viagem. Embora em um contexto relacionado à logística humanitária, destaca-se o estudo de Carvalho (2023), que desenvolve uma modelagem matemática com otimização robusta a partir de incertezas nos dados de demanda. Essas incertezas são abordadas por meio de cenários, cada um associado a um nível de probabilidade de ocorrência.

Esta pesquisa representa uma melhoria significativa quando comparada às demais existentes na literatura. Busca-se aprimorar o modelo de Caetano *et al.* (2022), que traz um maior número de medidas sustentáveis na função objetivo (ver Tabela 1) considerando também a incerteza nos dados de demanda. Para tanto, a formulação proposta em Carvalho (2023) foi utilizada como base para adaptação dos parâmetros e variáveis do modelo a partir um novo conjunto (cenários).

Para esta nova abordagem, as principais adaptações se referem a: adição de um multiplicador de ajuste associado ao tempo de espera; adição de uma nova dimensão (s) para toda variável do modelo original (determinístico), relacionando-as a cada cenário $s \in S$; ajuste do parâmetro de demanda por cenário; inclusão da probabilidade de ocorrência de cada cenário; modificação das variáveis de decisão afetadas pela variação do número de passageiros; e inclusão de uma variável de variação do custo, relacionada ao equilíbrio entre o custo e a aversão ao risco da solução obtida.

3. Modelo Robusto

Considere um sistema de transporte por ônibus composto por várias rotas, cada uma com características específicas. Há um número definido de passageiros que precisam ser transportados em uma hora e esta quantidade é o que define os cenários simulados no modelo. Por exemplo, um cenário pode ser caracterizado por uma demanda elevada, enquanto outro pode representar um fluxo menor de usuários.

O cálculo da quantidade de viagens necessárias depende do modelo e disponibilidade da frota, bem como da capacidade de carregamento, que representa o máximo de passageiros permitidos em um ônibus. Essa frequência também está sujeita à aversão ao risco, que influencia o nível de conservadorismo da solução com base na variação do custo total esperado [Carvalho 2023].

O grau de aversão ao risco refere-se à disposição do tomador de decisão em assumir riscos, sendo este parâmetro tratado como uma parcela da variação do custo esperado, com um peso associado que indica a disposição em aceitar instabilidades, conforme apontado em Mulvey *et al.* (1995). Neste estudo, o tomador de decisão é identificado como a empresa responsável pelos serviços.

Embora os interesses dessas empresas estejam predominantemente voltados para a dimensão econômica, visando a rentabilidade, é imperativo que considerem igualmente os aspectos ambientais e sociais em suas decisões. Deve-se, portanto, alinhar as ações que mitiguem os impactos ao meio ambiente, além de abordar a exigência dos passageiros quanto à qualidade, assegurando sua fidelização ao serviço de transporte público.

Uma vez contextualizado o problema, nomenclaturas sobre os conjuntos e índices, os parâmetros utilizados no modelo matemático e as variáveis de decisão são apresentados nas Tabelas 2, 3 e 4.

Tabela 2. Conjuntos e índices do modelo matemático.

| Notação | Descrição |
|---------|---|
| R | Conjunto dos tipos de veículos disponíveis para operação. |
| B | Conjunto dos tipos de veículos disponíveis para operação. |
| S | Conjunto dos cenários de demanda. |

Tabela 3. Parâmetros do modelo matemático.

| Notação | Descrição |
|-----------|--|
| LE_r | Comprimento (km) da rota $r \in R$. |
| PD_{rs} | Quantidade de passageiros na rota $r \in R$ por faixa horária no cenário $s \in S$. |
| FT_b | Quantidade total de veículos do tipo $b \in B$ disponíveis. |

| Notação | Descrição |
|-----------|--|
| SE_b | Número de assentos em um veículo do tipo $b \in B$. |
| LF_b | Quociente entre a quantidade de passageiros a bordo e o número de assentos (fator de carregamento) em um veículo do tipo $b \in B$. |
| OC_b | Custo operacional ($\frac{R\$}{km}$) do veículo do tipo $b \in B$. |
| EC_b | Custo ambiental ($\frac{R\$}{kg\ de\ CO_2}$) do veículo do tipo $b \in B$. |
| PR_s | Probabilidade de ocorrência do cenário $s \in S$. |
| WT | Custo social ($R\$/min$) para o tempo de espera. |
| DI | Custo social ($R\$/passageiro$) para o desconforto dos que realizam a viagem em pé. |
| TR | Custo social ($R\%$) para a transferência. |
| FA | Custo social ($R\$/passageiro$) para a tarifa. |
| SP | Faixa horária (min) da operação analisada. |
| EM | Taxa de dióxido de carbono emitida por um ônibus ($\frac{kg\ de\ CO_2}{km}$). |
| AW | Tempo de espera aceitável (min). |
| MU | Multiplicador de ajuste para tempo de espera percebido. |
| λ | Peso associado à variação do custo esperado. |

Tabela 4. Variáveis de decisão do modelo matemático.

| Notação | Descrição |
|-----------------------|---|
| $f_{brs} \in Z_+$ | Frequência do veículo do tipo $b \in B$ na rota $r \in R$ no cenário $s \in S$. |
| $q_{brs} \in Z_+$ | Quantidade de passageiros a bordo no veículo do tipo $b \in B$ na rota $r \in R$ no cenário $s \in S$. |
| $h_{brs} \in R_+$ | Intervalo entre as partidas do veículo tipo $b \in B$ na rota $r \in R$ no cenário $s \in S$. |
| $\theta_s \in R_+$ | Variável auxiliar de linearização que representa a variação do custo esperado em cada cenário $s \in S$. |
| $a_{brs} \in \{0,1\}$ | Variável binária auxiliar para ativação ($a_{brs} = 1$) ou não ($a_{brs} = 0$) da relação entre a frequência e o intervalo entre as partidas do veículo tipo $b \in B$ na rota $r \in R$ no cenário $s \in S$. |
| $y_{rs} \in \{0,1\}$ | Variável binária que indica se há ($y_{rs} = 1$) ou não ($y_{rs} = 0$) um tempo de espera superior ao admissível na rota $r \in R$ no cenário $s \in S$. |

Para uma melhor compreensão da Função Objetivo do modelo matemático robusto, considere que o custo total esperado é dado pela Equação (1) e que a variação do custo total esperado segue conforme Equação (2).

$$\begin{aligned}
 CTOT_s = & \left(\sum_{b \in B} \sum_{r \in R} OC_b LE_r f_{brs} + EM \sum_{b \in B} \sum_{r \in R} EC_b LE_r f_{brs} + WT \right. \\
 & \cdot MU \sum_{b \in B} \sum_{r \in R} \frac{h_{brs}}{2} + DI \sum_{b \in B} \sum_{r \in R} (q_{brs} - SE_b f_{brs}) + TR \sum_{r \in R} y_{rs} \\
 & \left. + FA \sum_{b \in B} \sum_{r \in R} q_{brs} \right) \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VTOT_s = & \left(\sum_{b \in B} \sum_{r \in R} OC_b LE_r f_{brs} + EM \sum_{b \in B} \sum_{r \in R} EC_b LE_r f_{brs} \right. \\
& \left. + DI \sum_{b \in B} \sum_{r \in R} (q_{brs} - SE_b f_{brs}) + FA \sum_{b \in B} \sum_{r \in R} q_{brs} \right) \quad (2)
\end{aligned}$$

A Equação (1) está relacionada ao custo total do sistema que compreende: i. custos de operação, que envolve as despesas de operação por quilômetro, com fatores como mão de obra, encargos e insumos; ii. custos ambientais, que se refere às emissões de CO₂ em função da distância percorrida por cada viagem; iii. custos de tempo de espera para embarque; iv. custos de desconforto por realizar a viagem em pé; v. custos de transferência, quando o tempo de espera é superior ao aceitável; e vi. Custos de tarifa, pago por cada usuário para deslocamento. Por sua vez, a Equação (2) representa o valor esperado E(.), que deve ser ponderado pela probabilidade de ocorrência de um dado cenário e uma medida de dispersão que controla o risco (variabilidade) do custo total. Na modelagem deste trabalho, considerou-se a variabilidade apenas das variáveis de frequência e número de passageiros transportados, que possuem maior impacto na programação das viagens.

Desta forma, descreve-se o modelo proposto para o problema de frequência a seguir.

$$\text{Min } z = \sum_{s \in S} PR_s CTOT_s + \lambda \sum_{s \in S} PR_s \left\{ \left[VTOT_s - \sum_{s' \in S} PR_{s'} VTOT_{s'} \right] + 2\theta_s \right\} \quad (3)$$

Sujeito a:

$$\sum_{r \in R} f_{brs} \leq FT_b \quad \forall b \in B, s \in S \quad (4)$$

$$\frac{q_{brs}}{SE_b f_{brs}} \leq LF_b \quad \forall b \in B, r \in R, s \in S \quad (5)$$

$$f_{brs} h_{brs} = SP a_{brs} \quad \forall b \in B, r \in R, s \in S \quad (6)$$

$$\frac{f_{brs}}{SP} \leq a_{brs} \quad \forall b \in B, r \in R, s \in S \quad (7)$$

$$\frac{h_{brs}}{2} - AW \leq (SP - AW) y_{rs} \quad \forall b \in B, r \in R, s \in S \quad (8)$$

$$\sum_{b \in B} q_{brs} = PD_{rs} \quad \forall r \in R, s \in S \quad (9)$$

$$VTOT_s - \sum_{s' \in S} PR_{s'} VTOT_{s'} + \theta_s \geq 0 \quad \forall s \in S \quad (10)$$

$$f_{brs} \in Z_+ \quad \forall b \in B, r \in R, s \in S \quad (11)$$

$$q_{brs} \in Z_+ \quad \forall b \in B, r \in R, s \in S \quad (12)$$

$$h_{brs} \in R_+ \quad \forall b \in B, r \in R, s \in S \quad (13)$$

$$\theta_s \in R_+ \quad \forall s \in S \quad (14)$$

$$a_{brs} \in \{0,1\} \quad \forall b \in B, r \in R, s \in S \quad (15)$$

$$y_{rs} \in \{0,1\} \quad \forall r \in R, s \in S \quad (16)$$

A Função Objetivo (3) possui dois termos principais. O primeiro está relacionado ao custo total do sistema, enquanto o segundo, adicionado à reformulação do modelo para a abordagem robusta, está relacionado à variação do custo total esperado. O coeficiente λ é um peso não-negativo que controla o compromisso (*trade-off*) entre custo esperado e o risco. Aumentando-se λ , é possível gerar soluções com baixa variabilidade, mas com custos esperados elevados. O problema com $\lambda = 0$ representa o programa determinístico tradicional neutro ao risco. A variável auxiliar θ_s foi criada por Yu e Li (2000) para linearizar a primeira proposta de aversão ao risco apresentada por Bozorgi-Amiri *et al.* (2013), juntamente com as Restrições (10) e (14).

As Restrições (4) restringem a quantidade de partidas em cada cenário de acordo com a frota disponível. As Restrições (5) limitam o número máximo de passageiros a serem transportados em cada cenário de acordo com a capacidade dos veículos. As Restrições (6) garantem que a frequência seja igual ao inverso do intervalo entre as partidas, em minutos. As Restrições (7) ativam as Restrições (6) quando há a realização de uma viagem em alguma rota. Ou seja, quando a variável binária a_{brs} assume um valor igual a um, a relação entre frequência e o intervalo é ativada. Quando não há viagens, a_{brs} assume um valor igual a zero. As Restrições (8) asseguram que uma rota será penalizada sempre que o tempo de espera exceder o valor máximo tolerável. As Restrições (9) alocam a demanda total existente, agora por cenário, aos veículos disponíveis. As Restrições (10) são auxiliares e permitem a linearização do modelo. Por fim, as Restrições (11)-(16) definem o domínio das variáveis de decisão.

4. Experimentos Computacionais

O modelo proposto foi aplicado em uma instância com dados de demanda empíricos. Contudo, os parâmetros relacionados ao comprimento das rotas e à composição da frota foram definidos com base no estudo de Caetano *et al.* (2022), que aborda as linhas de ônibus que operam entre as regiões central e oceânica de Niterói, no estado do Rio de Janeiro, Brasil.

O número de passageiros transportados varia conforme o cenário simulado. No primeiro cenário, ocorre a demanda regular prevista em condições normais, sem incidentes que afetem as operações. No segundo, há um aumento de 100% na demanda usual. Um estudo da OECD (2021) sugere que a demanda por transporte urbano de passageiros mais que dobrará entre 2015 e 2050, após uma queda temporária devido à pandemia da Covid-19. Outros contextos, como a gratuidade em algumas cidades brasileiras durante as eleições [Diário do Transporte 2022], também podem resultar em um aumento nos deslocamentos. No terceiro cenário, optou-se por uma redução de aproximadamente 35% no número de passageiros regulares, refletindo uma situação semelhante à crise sanitária, onde a fuga do passageiro representou uma perda de 32,6% em 2021, comparado a 2019 [Soares 2022].

Os parâmetros referentes à demanda, rotas e frota foram estão resumidos nas Tabelas 5 e 6.

Tabela 5. Características das rotas e demanda de passageiros.

| Rota | Comprimento (km) | Quantidade de passageiros por faixa horária | | |
|--------|------------------|---|-----------|-----------|
| | | Cenário 1 | Cenário 2 | Cenário 3 |
| Rota 1 | 21,23 | 260 | 520 | 169 |
| Rota 2 | 22,75 | 992 | 1984 | 645 |
| Rota 3 | 38,88 | 833 | 1666 | 541 |
| Rota 4 | 21,36 | 166 | 332 | 108 |
| Rota 5 | 36,36 | 401 | 802 | 261 |
| Rota 6 | 40,19 | 406 | 812 | 264 |

Tabela 6. Características da frota disponível.

| Modelo | Número de assentos | Fator de carregamento | Custo operacional ($\frac{R\$}{km}$) | Custo ambiental ($\frac{R\$}{kg\ de\ CO_2}$) | Disponibilidade |
|--------|--------------------|-----------------------|---|---|-----------------|
| 1 | 39 | 2,15 | 4,05 | 0,37 | 25 |
| 2 | 42 | 1,91 | 4,20 | 0,42 | 73 |
| 3 | 48 | 1,00 | 4,80 | 0,64 | 47 |

Para monetizar as emissões de CO₂, adotou-se o preço global do carbono de 75 USD por tonelada, conforme recomendação do Fundo Monetário Internacional [Parry *et al.* 2022], com a taxa de conversão de \$1,00 = R\$5,01 em 04/11/2022. Esse custo foi atribuído ao veículo Tipo 1, de maior capacidade nominal. Essa atribuição também considerou a ocupação média do número de passageiros [IPEA 2011]. Para os demais veículos foi feita uma distribuição relacionada ao número de passageiros.

Em relação aos parâmetros sociais, o custo do tempo de espera é estabelecido a partir da avaliação subjetiva feita em Romano (2019), sendo fixado em R\$4,46. Este valor representa a despesa relativa ao tempo perdido pelos passageiros na rede de ônibus. O tempo de espera está ainda associado a um multiplicador de ajuste fixado em 2,5. Esse valor reflete a percepção dos passageiros sobre o tempo de espera para o embarque, podendo ser 2,5 vezes maior do que o tempo real [ACCENT 2016].

O custo do desconforto devido ao deslocamento em pé foi definido em 1,5 vezes o salário mínimo nacional [Brasil 2023] dividido pela carga horária em minutos [Brasil 1988]. Conforme apontam Yap *et al.* (2020), o incômodo físico em veículos lotados, especialmente durante viagens em pé, amplifica a percepção do tempo de viagem. Por fim, os custos de transferência e tarifa foram adotados como R\$4,05 [RIOCARD Mais 2022].

4.1. Instâncias

Foram estabelecidos três vetores de probabilidade para os cenários de demanda delineando a base para os testes computacionais e análise dos resultados:

- Cenário 1 com maior probabilidade (50%) de ocorrência: $PR_S = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$;
- Cenário 2 com maior probabilidade (50%) de ocorrência: $PR_S = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\}$; e
- Cenário 3 com maior probabilidade (50%) de ocorrência: $PR_S = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\}$;

Este padrão foi adotado de acordo com Carvalho (2023) para examinar a sobreposição de um único cenário em relação aos demais. O peso vinculado à variação do custo esperado (λ) foi ajustado entre 0 e 1,5 para avaliar a mudança na aversão ao risco do tomador de decisão. Quando $\lambda = 0$, a solução para cada cenário ($CTOT_s$) coincide com a do modelo determinístico individual, pois o segundo termo da Função Objetivo (3) é nulo.

4.2. Resultados e discussões

O modelo robusto foi implementado utilizando o editor de código-fonte Visual Studio Code e a linguagem de programação *Python* 3.9 em um computador Intel®Core™ 11ª Geração i5- 1135G7, CPU 2.40GHz, com 8GB de memória RAM e sistema operacional *Windows 11 Home Single Language*. Adotou-se o *Gurobi Optimizer*, versão 9.1.2, que é um bom solucionador matemático para problemas não lineares, que é o caso desta pesquisa.

Por meio de experimentos iniciais, foi observado que o solucionador dedicou muito tempo na busca pela otimalidade em algumas instâncias. Portanto, optou-se por estabelecer um limite de uma hora para o tempo de processamento em todos os experimentos e uma tolerância de *gap* de 0,1%, a partir do parâmetro *MIPGap*, do *Gurobi*.

Com $\lambda = 0$, os custos totais de cada cenário ($CTOT_s$) no modelo robusto coincidem com as soluções do modelo determinístico individual, conforme detalhado na Tabela 7. Vale notar que esses valores refletem os custos específicos de cada cenário. Para calcular os custos do sistema, basta multiplicar esses valores pela probabilidade de ocorrência de cada cenário. Destaca-se ainda que, devido ao maior número de passageiros no Cenário 2, este apresentou a solução mais onerosa.

Tabela 7. Características da frota disponível.

| Cenário | Custo da Solução (R\$) |
|---------|------------------------|
| 1 | 18.614,19 |
| 2 | 36.657,49 |
| 3 | 12.706,28 |

Na Figura 1, observa-se a variação do custo no modelo robusto em relação ao grau de aversão ao risco para diferentes vetores de probabilidade. Conforme previsto, soluções mais conservadoras são alcançadas com valores mais elevados da constante λ . Portanto, quanto menor a tolerância às incertezas, mais caras e robustas são as soluções, evidenciando maior resiliência diante de diversas situações.

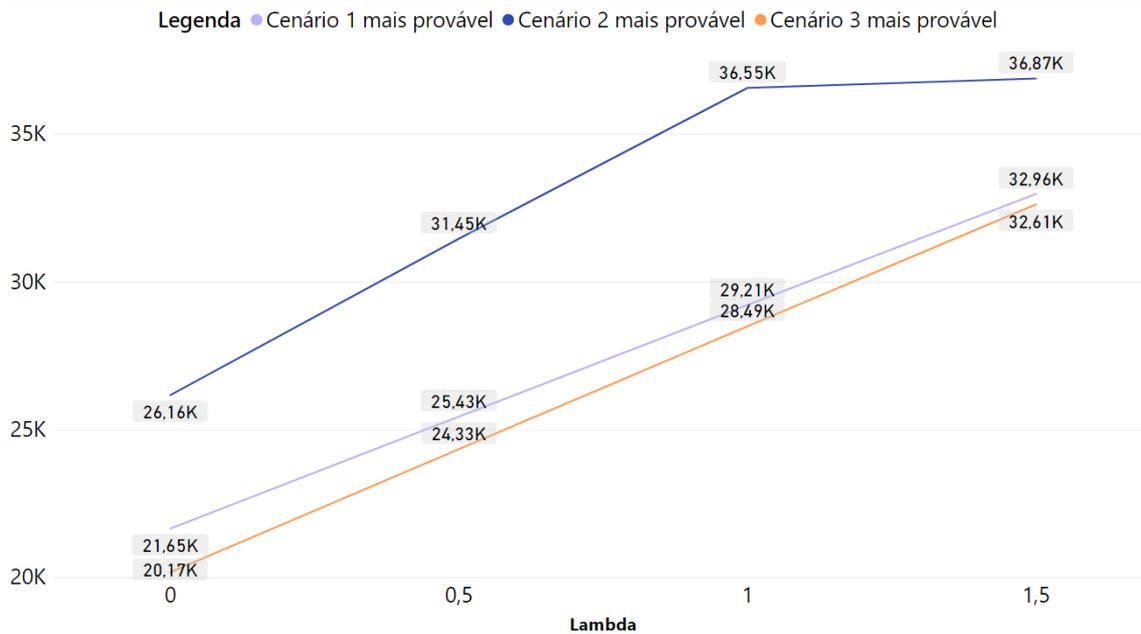


Figura 1. Custo do sistema na solução robusta em função da aversão ao risco.

Nota-se que, embora a solução do modelo determinístico (ver Tabela 7) seja mais benéfica para os cenários de demanda regular (Cenário 1) e baixa demanda (Cenário 3), o modelo robusto apresenta soluções mais atrativas para o Cenário 2, quando este ocorre, exceto para o $\lambda = 1,5$. Essa discrepância é explicada pelo *gap* obtido.

Devido à limitação de processamento a uma hora, não foi possível atingir um *gap* igual a zero, resultando em uma diferença, ainda que mínima, em relação à solução ótima. O modelo robusto, por sua natureza mais conservadora, visa proteger contra o pior cenário, estabelecendo esse cenário como limite na busca por resultados. Em outras palavras, os custos das soluções robustas tendem a se aproximar do valor do pior cenário à medida que o grau de aversão ao risco aumenta.

Os custos totais do sistema estão detalhados na Figura 2. Nota-se que, dependendo da aversão ao risco, é possível reduzir os custos operacionais nos Cenários 2 e 3, mesmo diante das soluções mais caras propostas do modelo robusto. Devido à magnitude (ordem de grandeza) dos custos operacionais adotados no modelo, essa inclinação em priorizar a dimensão econômica é observada. No entanto, pode-se afirmar que o modelo faz uma análise criteriosa dos parâmetros para identificar a opção mais econômica para o sistema.

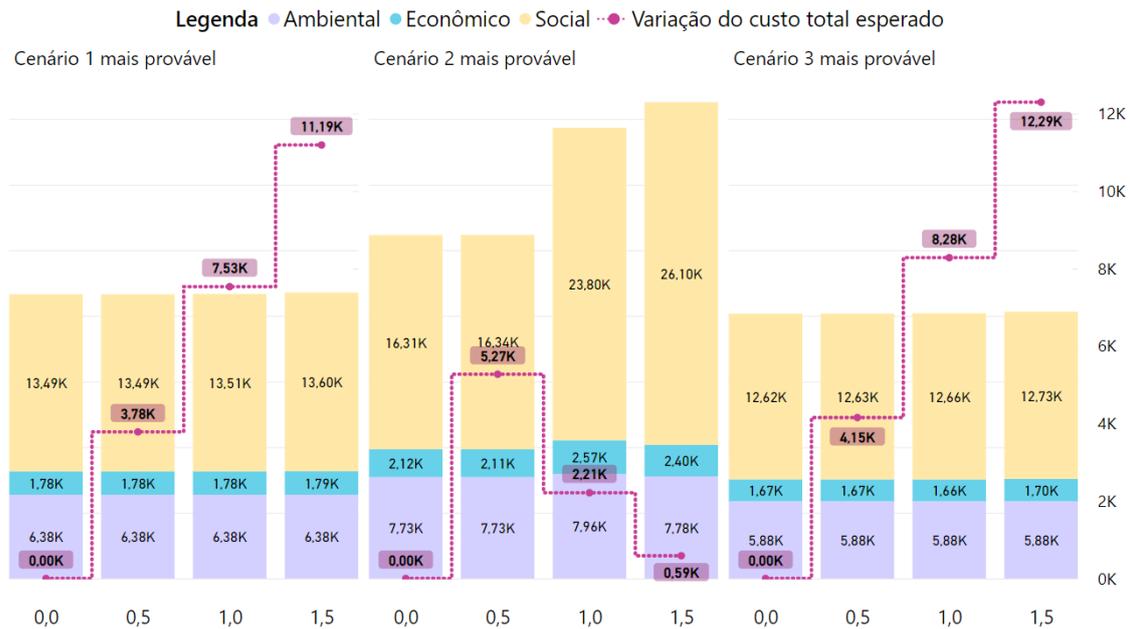


Figura 2. Custos de cada dimensão sustentável e variação do custo total esperado.

Uma vantagem adicional da abordagem robusta está na capacidade de aumentar consideravelmente o valor de lambda (até 1,5), sem gerar um aumento expressivo nos custos, destacando a capacidade do modelo em oferecer soluções resilientes, como visto nos Cenários 1 e 3. Além dos custos, a adaptabilidade do modelo é evidente na frequência, apresentando soluções similares e compatíveis entre si, conforme demonstra a Figura 3.

Considerando o Cenário 1 mais provável, as soluções podem aumentar até cerca de 77% do custo total do modelo determinístico (Tabela 7). No entanto, há uma garantia de que 75% da solução, ou seja, da frequência obtida, é consistente em todos os cenários. Isso revela o nível de robustez, com uma maior proximidade da otimalidade nas situações simuladas, o que também é observado no Cenário 3. A tentativa de aproximar as soluções é principalmente realizada pela alocação da frota nas rotas, ou seja, pelo arranjo dos ônibus.

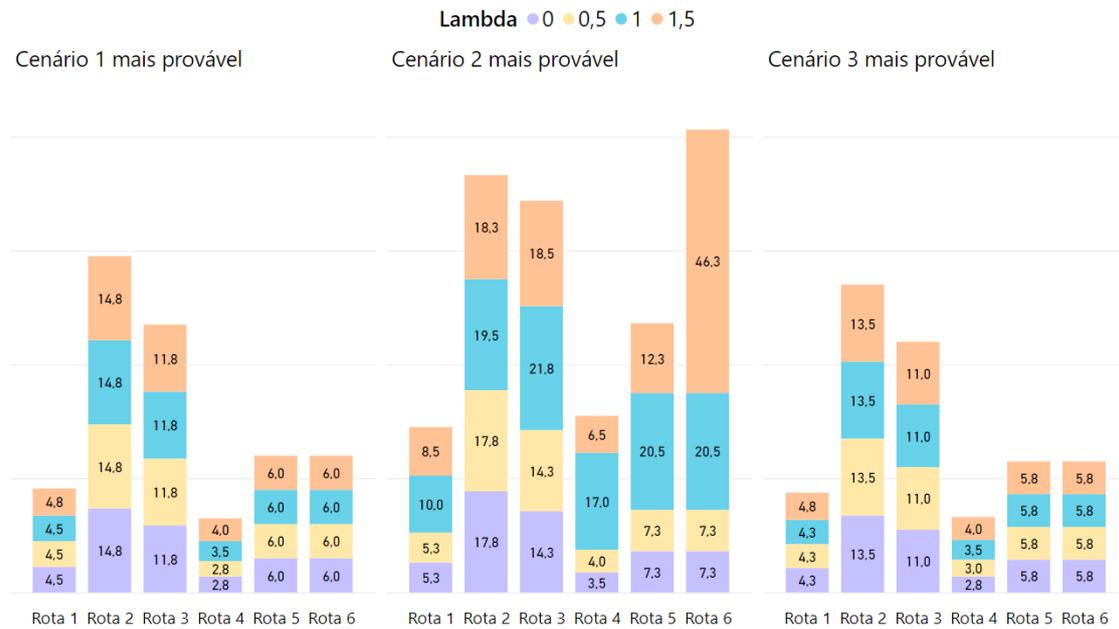


Figura 3. Frequência por rota em função da aversão ao risco.

No entanto, ao considerar o Cenário 2 como o mais provável, observa-se uma disparidade nos resultados, não mantendo o padrão de similaridade. Isso ocorre quando se busca reduzir a diferença entre as parcelas dos diversos cenários (Figura 2), podendo resultar em distorções nos valores das variáveis, os quais podem não ser necessariamente iguais. Adicionalmente, é importante destacar que, a partir de um determinado valor de lambda, as soluções podem se tornar impraticáveis, pois alguns casos apresentaram frequências excessivamente altas, não condizentes com a demanda real da rota.

5. Considerações finais

Este estudo aborda a complexidade na determinação do número ideal de viagens em redes de ônibus, considerando esferas social, ambiental e econômica. Propõe-se um modelo matemático otimizado que incorpora incertezas na demanda esperada em diferentes cenários. Experimentos computacionais realizados em uma rede simulada, mas com dados semelhantes à realidade, validam o modelo.

Os resultados destacam a eficácia da abordagem robusta, que, embora mais custosa que o modelo determinístico, oferece uma maior similaridade entre os resultados, mitigando grandes variações e possibilitando a redução de custos para operadores nos piores casos. O modelo pode ainda contribuir como ferramenta de apoio à tomada de decisão aos operadores, permitindo soluções mais abrangentes sob a ótica sustentável.

Uma limitação observada se refere à definição dos valores de probabilidade de ocorrência e da constante λ , dependendo da expertise dos tomadores de decisão. A maior aversão ao risco testada resultou em discrepâncias nos resultados, ressaltando a importância da cuidadosa escolha desses parâmetros para evitar soluções distantes da aplicação prática. Outra limitação refere-se ao termo relacionado ao desconforto por viagens realizadas em pé. Quando o número de passageiros é inferior à capacidade ofertada, o termo pode ficar negativo, configurando assim um subdimensionamento da frota. Para a instância testada neste estudo, porém, não foi identificado este comportamento, considerando o somatório da parcela de desconforto (custo total e custo esperado) para

os três cenários e suas respectivas probabilidades de ocorrência. Contudo, dependendo da instância, este comportamento pode ser observado.

Para pesquisas futuras, recomenda-se a aplicação do modelo em instâncias maiores e reais. Além disso, sugere-se revisar a abordagem computacional para incorporar a incerteza na taxa de chegada aos pontos de ônibus e calibrar os parâmetros de entrada em relação à probabilidade e aversão ao risco. É aconselhável também realizar uma análise cuidadosa da ordem de grandeza dos parâmetros escolhidos para evitar uma tendência prioritária em aspectos sustentáveis. Também se recomenda a revisão da parcela de desconforto, de modo que esta seja computada somente quando o número de passageiros excede a oferta. Por fim, outras medidas sustentáveis podem ser trabalhadas, como aumento da mobilidade urbana, redução de congestionamentos, entre outros.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Código de Financiamento 001, e foi parcialmente apoiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq (308792/2022-0 e 315694/2021-1), e da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), número da bolsa E-26/201.225/2021.

Referências

- ACCENT. (2016). Value of Time for Bus Passengers: Final Report. Accent, RAND Europe. Disponível em: <https://content.tfl.gov.uk/value-of-time-at-the-stop-report.pdf>. Acesso em: 28 de ago. 2023.
- Agrawal, K., Suman, H. K., e Bolia, N. B. (2020). Frequency optimization models for reducing overcrowding discomfort. *Transportation Research Record*, 2674(5):160–171. DOI: <https://doi.org/10.1177/0361198120912230>.
- AlKheder, S., AlRukaibi, F., e Zaqzouq, A. (2018). Optimal bus frequency for kuwait public transportation company: A cost view. *Sustainable Cities and Society*, 41:312–319. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scs.2018.05.042>.
- Amoroso, S., Migliore, M., Catalano, M., e Galatioto, F. (2010). A demand-based methodology for planning the bus network of a small or medium town. *European Transport*, 44:41–46.
- ANTP. (2020). Sistema de informações da mobilidade urbana da Associação Nacional de Transportes Público (Simob/ANTP): relatório geral 2018. Associação Nacional de Transportes Públicos. Disponível em: <http://files.antp.org.br/simob/sistema-de-informacoes-da-mobilidade--simob--2018.pdf>. Acesso em: 28 de ago. 2023.
- Arbex, R. O. e da Cunha, C. B. (2015). Efficient transit network design and frequencies setting multi-objective optimization by alternating objective genetic algorithm. *Transportation Research Part B: Methodological*, 81:355–376. Optimization of Urban Transportation Service Networks. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2015.06.014>.
- Baghoussi, Y., Mendes-Moreira, J., e Emmerich, M. T. M. (2018). Updating a robust optimization model for improving bus schedules. In: 10th International Conference on Communication Systems & Networks (COMSNETS) (pp. 619–624). DOI: <https://doi.org/10.1109/COMSNETS.2018.8328284>.
- Ben-Tal, A., El Ghaoui, L., & Nemirovski, A. (2009). *Robust Optimization*. Princeton University Press.
- Blum, J. e Mathew, T. (2012). Implications of the computational complexity of transit route network redesign for metaheuristic optimisation systems. *IET Intelligent Transport Systems*, 6:124–131(7). DOI: <https://doi.org/10.1049/iet-its.2011.0021>.
- Bozorgi-Amiri, A., JabalAmeli, M. S., e Mirzapour Al-e-Hashem, S. M. J. (2013). A multi-objective robust stochastic programming model for disaster relief logistics under uncertainty. *OR Spectrum*, 35, 905–933. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00291-011-0268-x>.
- BRASIL. (1988). Constituição da República Federativa do Brasil. Casa Civil. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em 28 de ago. 2023.
- BRASIL. (2023). Presidente anuncia salário mínimo de R\$ 1.320 a partir de maio e isenção do IR para quem recebe até R\$ 2.640. *Economia e Gestão Pública*. Disponível em: <https://www.gov.br/pt-br/noticias/financas-impostos-e-gestao-publica/2023/02/presidente-anuncia-salario-minimo-de-r-1-320-a-partir-de-maio-e-isencao-do-ir-para-quem-recebe-ate-r-2.640>. Acesso em 28 de ago. 2023.

- Caetano, J. A., Climaco, F. G. N., Mattos, G. M e Bahiense, L. (2022). Um modelo de otimização da frequência de operação com enfoque nos custos do transporte público por ônibus. In: 36º Congresso de Pesquisa e Ensino em Transporte da ANPET. Fortaleza, Brasil.
- Carvalho, P. R. D. (2023). Otimização da distribuição de suprimentos hospitalares frente à pandemia da Covid-19 considerando incertezas. (Dissertação de Mestrado). Programa de Engenharia de Transportes, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.
- Cats, O. e Glück, S. (2019). Frequency and vehicle capacity determination using a dynamic transit assignment model. *Transportation Research Record*, 2673(3):574–585. DOI: <https://doi.org/10.1177/0361198118822292>.
- Chen, B., Bai, R., Li, J., Liu, Y., Xue, N. e Ren, J. (2020) A multiobjective single bus corridor scheduling using machine learning-based predictive models. *International Journal of Production Research*, 61:1, 131-145. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207543.2020.1766716>.
- Chien, S. I.-J., Ulusoy, Y. Y., e Wei, C.-H. (2010). Integrated transit services for minimum cost operation considering heterogeneous demand. *Transportation Planning and Technology*, 33(7):605–624. DOI: <https://doi.org/10.1080/03081060.2010.512222>.
- Cyril, A., Mulangi, R. H., e George, V. (2020). Demand-based model for line planning in public transport. *Transportation Research Procedia*, 48:2589–2596. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2020.08.252>.
- Dakic, I., Yang, K., Menendez, M., e Chow, J. Y. (2021). On the design of an optimal flexible bus dispatching system with modular bus units: Using the three-dimensional macroscopic fundamental diagram. *Transportation Research Part B: Methodological*, 148:38–59. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2021.04.005>.
- dell’Olio, L., Ibeas, A., e Ruisánchez, F. (2012). Optimizing bus-size and headway in transit networks. *Transportation*, 49:449–464. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11116-011-9332-2>.
- Diário do Transporte. (2022). Número de passageiros de ônibus em Diadema mais que dobrou com gratuidade nas eleições, diz prefeitura. Diário do Transporte. Disponível em: <https://diariodotransporte.com.br/2022/11/02/numero-de-passageiros-de-onibus-em-diadema-mais-que-dobrou-com-gratuidade-nas-eleicoes-diz-prefeitura/>. Acesso em: 30 de jan. de 2024.
- Durán-Micco, J. e Vansteenwegen, P. (2022). Transit network design considering link capacities. *Transport Policy*, 127:148–157. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tranpol.2022.08.018>.
- Ge, L., Voß, S., e Xie, L. (2022). Robustness and disturbances in public transport. *Public Transport*, 14, 191–261. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12469-022-00301-8>.
- Giesen, R., Martínez, H., Mauttone, A., e Urquhart, M. E. (2016). A method for solving the multi-objective transit frequency optimization problem. *Journal of Advanced Transportation*, 50(8):2323–2337. DOI: <https://doi.org/10.1002/atr.1461>.

- Gkiotsalitis, K., e Alesiani, F. (2019). Robust timetable optimization for bus lines subject to resource and regulatory constraints. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 128, 30–51. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tre.2019.05.016>.
- Gkiotsalitis, K. e Cats, O. (2018). Reliable frequency determination: Incorporating information on service uncertainty when setting dispatching headways. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 88:187–207. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trc.2018.01.026>.
- GVBUS (2024). As 4 razões que fazem do ônibus um transporte sustentável. Sindicato das Empresas de Transporte Metropolitano da Grande Vitória. Disponível em: <https://www.gvbus.org.br/as-4-razoes-que-fazem-do-onibus-um-transporte-sustentavel/>. Acesso em: 30 de jan. de 2024.
- Hadas, Y. e Shnaiderman, M. (2012) Public-transit frequency setting using minimum-cost approach with stochastic demand and travel time. *Transportation Research Part B: Methodological*, v. 46, n. 8, p. 1068-1084. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2012.02.010>.
- Hatzenbühler, J., Cats, O., e Jenelius, E. (2020). Transitioning towards the deployment of line-based autonomous buses: Consequences for service frequency and vehicle capacity. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 138:491–507. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2020.06.019>.
- Herbon, A. e Hadas, Y. (2015). Determining optimal frequency and vehicle capacity for public transit routes: A generalized newsvendor model. *Transportation Research Part B: Methodological*, 71:85–99. <https://doi.org/10.1016/j.trb.2014.10.007>.
- IPEA (2011). Emissões relativas de poluentes do transporte motorizado de passageiros nos grandes centros urbanos brasileiros. Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada. Disponível em: http://repositorio.ipea.gov.br/bitstream/11058/1578/1/td_1606.pdf. Acesso em: 03 de nov. 2021.
- Jha, S. B., Jha, J., e Tiwari, M. K. (2019). A multi-objective meta-heuristic approach for transit network design and frequency setting problem in a bus transit system. *Computers & Industrial Engineering*, 130:166–186. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.02.025>.
- Lemus-Romani, J., Alonso, B., Moura, J. L., Crawford, B., Soto, R., e González, F. (2021). Limited stop services design considering variable dwell time and operating capacity constraints. *IEEE Access*, 9:30359–30373. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3059512>.
- Liang, M., Zhang, H., Ma, R., Wang, W., e Dong, C. (2021). Cooperatively coevolutionary optimization design of limited-stop services and operating frequencies for transit networks. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 125:103038. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2021.103038>.
- Liu, X., Yu, J., Yang, X., e Tan, W. (2020). Multiperspective bus route planning in a stackelberg game framework. *Journal of Advanced Transportation*, 2020:16. <https://doi.org/10.1155/2020/1801320>.

- Liu, Y., Luo, X., Wei, X., Yu, Y., e Tang, J. (2022). Robust Optimization Model for Single Line Dynamic Bus Dispatching. *Sustainability* 14, no. 1: 73. <https://doi.org/10.3390/su14010073>.
- Maureira, G. e Codina, E. (2020). A model for the simultaneous selection of bus lines and frequency setting problems in the expansion of public transit systems. *Transportation Research Procedia*, 47:497–504. <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2020.03.124>.
- Mulvey, J.M., Vanderbei, R.J., e Zenios, S.A. (1995). Robust optimization of large scale-systems. *Operations Research*, 43(2), 264–281.
- NTU (2023) Dados do transporte público por ônibus. Disponível em: <https://ntu.org.br/novo/AreasInternas.aspx?idArea=7>. Acesso em: 30 de jan. de 2024.
- OECD. (2021). ITF Transport Outlook 2021. OECD iLibrary. <https://doi.org/10.1787/16826a30-en>.
- Ortúzar, J. d. e Willumsen, L. G. (2011). *Modelling Transport*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, United Kingdom, 4 edition. <https://doi.org/10.1002/9781119993308>.
- Parry, I., Black, S., e Zhunussova, K. (2022). Carbon Taxes or Emissions Trading Systems? Instrument Choice and Design. *International Monetary Fund (IMF). Staff Climate Note 2022/006*.
- Pathak, P., Agrawal, K., Suman, H. K., e Bolia, N. B. (2020). Frequency optimization-based approach for reducing crowding discomfort in delhi bus system. *Procedia Computer Science*, 170:265–272. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.03.039>.
- Peña, D., Tcherynykh, A., Nesmachnow, S., Massobrio, R., Feoktistov, A., Bychkov, I., Radchenko, G., Drozdov, A. Y., e Garichev, S. N. (2019). Operating cost and quality of service optimization for multi-vehicle-type timetabling for urban bus systems. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 133:272–285. <https://doi.org/10.1016/j.jpdc.2018.01.009>.
- RIOCARD Mais. (2022). Tarifas. Disponível em: <https://www.cartaoriocard.com.br/rcc/institucional/tarifas>. Acesso em: 05 de jul. 2022.
- Romano, W. (2019). Estimación de la demanda de transporte urbano en la ciudad de Villa Carlos Paz y cálculo de valoraciones subjetivas, aplicando modelos de elección discreta con parámetros aleatorios. (Tese de Doutorado). Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Córdoba.
- Sadrani, M., Tirachini, A., e Antoniou, C. (2022). Optimization of service frequency and vehicle size for automated bus systems with crowding externalities and travel time stochasticity. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 143:103793. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2022.103793>.
- Soares, R. (2022). Transporte público: 10,8 milhões de passageiros deixaram os ônibus com a pandemia. Disponível em: <https://jc.ne10.uol.com.br/colunas/mobilidade/2022/08/15059701-transporte-publico-108-milhoes-de-passageiros-deixaram-os-onibus-com-a-pandemia.html>. Acesso em: 30 de jan. de 2024.

- Tekin, S., Kofteci, S., Aydin, M. M., e Yildirim, M. S. (2018). Trip optimization for public transportation systems with linear goal programming (lgp) method. *Sigma J Eng Nat Sci*, 41.
- Ulusoy, Y. Y. e Chien, S. I.-J. (2015). Optimal bus service patterns and frequencies considering transfer demand elasticity with genetic algorithm. *Transportation Planning and Technology*, 38(4):409–424. <https://doi.org/10.1080/03081060.2015.1026101>.
- Verbas, I. O. e Mahmassani, H. S. (2015). Exploring trade-offs in frequency allocation in a transit network using bus route patterns: Methodology and application to large-scale urban systems. *Transportation Research Part B: Methodological*, 81:577–595. *Optimization of Urban Transportation Service Networks*. <https://doi.org/10.1016/j.trb.2015.06.018>.
- Yap, M., Cats, O., e Van Arem, B. (2020). Crowding valuation in urban tram and bus transportation based on smart card data. *Transportmetrica A: Transport Science*, 16, 23–42. <https://doi.org/10.1080/23249935.2018.1537319>.
- Yu, C.S. e Li, H. L. (2000). A robust optimization model for stochastic logistic problems. *International Journal of Production Economics*, 64, 385–397. [https://doi.org/10.1016/S0925-5273\(99\)00074-2](https://doi.org/10.1016/S0925-5273(99)00074-2).