

# CADERNOS DO IME – Série Estatística

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ  
ISSN on-line 2317-4536 / ISSN impresso 1413-9022 - v.54, p. 14-42, 2023  
DOI:10.12957/cadest.2023.79151

## OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS COM RETORNOS NÃO GAUSSIANOS: UMA ABORDAGEM BAYESIANA

Lizeth Jacquelin Rodriguez Huarsaya  
IAG Escola de Negócios, Departamento de Administração, PUC-Rio  
[lizeth.rodriguez.h@gmail.com](mailto:lizeth.rodriguez.h@gmail.com)

Luiz Eduardo Teixeira Brandão  
IAG Escola de Negócios, Departamento de Administração, PUC-Rio  
[brandao@iag.puc-rio.br](mailto:brandao@iag.puc-rio.br)

Javier Gutiérrez Castro  
Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, UFSC  
[javier.gutierrez@ufsc.br](mailto:javier.gutierrez@ufsc.br)

Edison Américo Huarsaya Tito  
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ  
[edison.tito@ime.uerj.br](mailto:edison.tito@ime.uerj.br)

### Resumo

*A teoria moderna de carteiras estabelece que a alocação ótima de ativos é uma função da média-variância da distribuição dos retornos. Geralmente, assume-se que esses retornos seguem uma distribuição Gaussiana, estimada a partir de dados históricos usando métodos da estatística frequentista. Entretanto, a dinâmica atual dos mercados globalizados pode provocar mudanças de regime ou quebras estruturais na série temporal dos retornos, tornando-os não Gaussianos. Para lidar com o problema das mudanças de regime, propõe-se substituir o mecanismo de otimização baseado no índice de Sharpe pela otimização baseada na medida Ômega. Isto porque a medida Ômega tem a vantagem de quantificar o risco-retorno de qualquer distribuição de probabilidade, não se restringindo à média-variância como acontece com o índice de Sharpe, solucionando assim o problema das mudanças de regime. Para lidar com o problema das quebras estruturais, propõe-se substituir o procedimento de estimação dos parâmetros da distribuição dos retornos, que se baseia em técnicas da estatística frequentista por técnicas da estatística Bayesiana. A estatística Bayesiana, tem a vantagem de combinar as informações públicas do mercado (dados históricos dos retornos) com informações privadas do investidor (visões prospectivas do mercado) permitindo corrigir o problema das quebras estruturais.*

**Palavras-chave:** Teoria Moderna de Carteiras; Medida Ômega; Estatística Bayesiana.

## 1. Introdução

A maneira mais tradicional de alocar ativos em uma carteira é por meio da aplicação da teoria moderna de carteiras, proposta por Markowitz (1952), que estabelece que as decisões de alocação de ativos devem ser tomadas baseadas no binômio risco-retorno, medidos pela média e variância das distribuições de retornos, respectivamente. Cabe ressaltar que Markowitz não fez nenhuma suposição sobre um formato específico que a distribuição de probabilidade dos retornos deveria ter, apenas, considerou seus dois primeiros momentos. Assim, na prática, a distribuição Gaussiana ou distribuição Normal (definida pela média-variância) é por excelência a distribuição padrão da teoria moderna de carteiras. Para selecionar a carteira ótima é necessário maximizar o índice de Sharpe (SHARPE, 1966), o qual depende dos parâmetros da média e variância das distribuições de retorno dos ativos, que definidos assim, assumem a premissa de que eles seguem uma distribuição Gaussiana. No entanto, as séries históricas de retornos frequentemente não seguem uma distribuição Gaussiana, resultando em alocações inadequadas e pouco intuitivas (JOBSON; KORKIE, 1981; MICHAUD, 1989).

Existem, pelo menos, duas hipóteses que podem explicar a natureza não Gaussiana das séries temporais dos retornos: (i) a primeira hipótese é de que as séries temporais dos retornos sofrem mudanças de regime (ou estados) que se repetem recorrentemente ao longo do tempo. Assim, os parâmetros da distribuição dos retornos, variam, geralmente, entre um número finito de estados, tipicamente de dois a quatro (SONG, 2014). Entretanto, foi observado que a volatilidade é maior nos regimes de retorno negativo do que nos regimes positivos (CHU; SANTONI; LIU, 1996), em outras palavras, existe uma não linearidade entre a média-variância, provocando uma assimetria na distribuição dos retornos, o que explicaria a natureza não Gaussiana. Estas mudanças de regime são produzidas, por exemplo, por crises financeiras, recessões econômicas, hiperinflação, mudanças nas políticas fiscais, etc. (ii) A segunda hipótese é de que as séries temporais dos retornos sofrem quebras estruturais permanentes e não recorrentes ao longo do tempo. Assim, os parâmetros da distribuição dos retornos, variam, de forma imprevisível, entre infinitos estados, provocando uma relação de média-variância do tipo estocástico, o que explicaria também a natureza não Gaussiana das séries temporais dos retornos. Estas quebras estruturais são produzidas por eventos de longa duração, como,

por exemplo: mudanças climáticas, descoberta de novas tecnologias, disputas geopolíticas, novas tendências sociais, etc.

Para lidar com o problema das mudanças de regime, propõe-se a substituição do mecanismo de otimização clássica baseada no índice de Sharpe (SHARPE, 1966), pela otimização baseada na medida Ômega. A medida Ômega, inicialmente proposta por Keating e Shadwick (2002), quantifica o risco-retorno de qualquer distribuição de probabilidade, não se restringindo apenas à média-variância, como acontece com o índice de Sharpe, ou seja, a medida Ômega é uma medida universal de quantificação de risco-retorno que permite a otimização de carteiras formadas por ativos de qualquer natureza probabilística.

Para lidar com o problema das quebras estruturais, propõe-se a substituição do procedimento de estimação dos parâmetros da distribuição dos retornos, baseada em técnicas da estatística Frequentista, por técnicas da estatística Bayesiana; a qual tem a vantagem de combinar as informações públicas do mercado (dados históricos dos retornos) com as informações privadas do investidor (visões prospectivas do mercado), permitindo corrigir as quebras estruturais dos retornos, inserindo as expectativas futuras do mercado sob a ótica do investidor. Esta combinação de informações é realizada aplicando o teorema de Bayes, onde, a distribuição a priori dos parâmetros da distribuição dos retornos é construída baseada nos dados históricos do mercado, e, na sequência, é construída uma distribuição de verossimilhança, baseada nas expectativas prospectivas do mercado, sob a ótica do investidor. Assim, ao aplicar o teorema de Bayes, obtém-se como resultado uma distribuição a posteriori dos parâmetros da distribuição dos retornos. A nova estimativa dos parâmetros que emerge da distribuição, a posteriori, é a que será utilizada no processo de otimização de carteiras. Portanto, a alocação de ativos com retornos não Gaussianos, provocados pelas quebras estruturais, realiza-se em duas etapas: primeiramente pelo mecanismo da inferência Bayesiana e, em seguida, pelo mecanismo da otimização baseada na medida Ômega. Tanto Doucet *et al.*(2000) como Robert e Casella (2004), apresentam maiores detalhes sobre a estatística Bayesiana.

A principal contribuição deste artigo é a proposta de uma metodologia integral de alocação de ativos considerando carteiras com retornos não Gaussianos provocados, tanto por mudanças de regime, quanto por quebras estruturais nas séries temporais dos retornos.

O artigo está organizado da seguinte maneira: Após a introdução, se apresenta uma revisão da literatura acadêmica relacionado ao tema desta pesquisa. Na seção 3 é exposta a metodologia; e na seção 4 são realizados os experimentos numéricos. Finaliza-se com as conclusões finais.

## 2. Revisão Bibliográfica

Existem na literatura alguns trabalhos que exploram a análise de carteiras considerando distribuições com retornos não Gaussianos provocados por mudanças de regime, como o desenvolvido por Oliveira (2014), quem estudou a alocação de carteiras com mudanças de regime através de duas perspectivas: a primeira considerando que a distribuição conjunta dos retornos sofre mudanças de regime, e a segunda considerando o modelo fatorial de Fama-French-Carhart. Por sua vez, Lewin e Campani (2020), estudaram a gestão de carteiras sob múltiplos regimes econômicos para alocação de ativos sob uma função de utilidade estocástica diferencial. Esta função permitiu separar os principais parâmetros de risco do investidor, identificando quatro regimes econômicos para o Brasil.

Em relação ao problema de otimização de carteiras com retornos não Gaussianos provocados por quebras estruturais, não foram encontradas referências bibliográficas exatas em relação ao tema, entretanto, existem diversos artigos, que serão descritos a seguir, que utilizam o teorema de Bayes na seleção de carteiras.

Black e Litterman (1992), abordaram o problema de alocação de ativos sob uma ótica Bayesiana. Os autores constataram que a maior deficiência do modelo clássico de média-variância não estava relacionada com o próprio modelo de alocação de ativos, e sim pelos dados históricos do mercado, que geravam estimativas ruidosas, em especial, o retorno esperado. Para superar esta deficiência, os autores trataram o retorno esperado como uma variável aleatória e na sequência construíram uma distribuição a priori, baseada no modelo de CAPM (Capital Asset Pricing Model), e uma distribuição de verossimilhança, baseada na visão de mercado sob a ótica do investidor, para, finalmente, aplicar o teorema de Bayes, tendo como resultado a distribuição a posteriori. O novo valor esperado do retorno, que emerge da distribuição a posteriori, é utilizado para substituir a estimativa anterior do retorno esperado calculado com dados históricos do mercado. Os resultados obtidos mostraram que o modelo Bayesiano apresenta resultados (alocações) conservadores e intuitivos em relação ao modelo clássico de média-variância.

Greyserman *et al.* (2006), pesquisaram a seleção de carteiras utilizando a previsão Bayesiana da distribuição dos retornos. Para isto, foram deduzidas e implementadas novas distribuições a priori, tanto para média, quanto para a matriz de variância-covariância dos retornos. Foram realizadas comparações entre esta abordagem e a metodologia clássica utilizando 25 anos de dados históricos sobre índices de ações. Os autores mostraram que a metodologia Bayesiana gera 1,5 pontos percentuais a mais por ano no desempenho adicional da carteira, o que é um resultado empírico bastante significativo.

Harvey *et al.* (2010), utilizaram a teoria Bayesiana para resolver dois problemas comuns da teoria de alocação de ativos: a primeira para manipular elevados momentos da distribuição dos retornos e a segunda para tratar da incerteza da estimação dos parâmetros da distribuição dos retornos. Os autores mostram que a abordagem Bayesiana permite obter melhores estimativas em comparação com a metodologia tradicional de Markowitz.

Bodnar *et al.* (2017), avaliaram carteiras de mínima variância dentro de um contexto Bayesiano. Para isto compararam distribuições a priori não informativas versus as informativas, obtendo uma distribuição posterior do peso da carteira de mínima variância, usando a média e a matriz de covariância.

Zhao *et al.* (2019), mencionam que o modelo tradicional de Markowitz subestima o risco da carteira, obtendo alocações sub ótimas, portanto, os autores propõem dois modelos de seleção de carteiras para modificar os parâmetros e melhorar o rendimento da carteira desde uma abordagem Bayesiana. Estes modelos são Bayesian - GARCH e Bayesian Markov Regime Switching - GARCH sendo avaliados no mercado de valores de China, obtendo como resultado que ambos os modelos podem minimizar o problema de sobre-estimação (overfitting) e obtendo carteiras de autofinanciamento.

Bauder *et al.* (2021), resolvem o problema da escolha ótima do carteira quando os parâmetros da distribuição dos retornos dos ativos são desconhecidos e estimados usando dados históricos. Utilizando distribuições futuras dos retornos dos ativos dada a amostra observável os autores obtém alocações ótimas e a fronteira eficiente Bayesiana supera a fronteira eficiente da amostra.

### 3. Metodologia

#### 3.1. Otimização de carteiras com retornos não Gaussianos provocados por mudanças de regime.

O caso mais elementar de mudanças de regime (ou estados), é o caso de uma série temporal de retornos, com períodos de alta e baixa volatilidade (dois regimes), que apresentam como fato estilizado, que a volatilidade é maior nos regimes de retorno negativo do que nos regimes positivos (CHU; SANTONI; LIU, 1996). Este comportamento, introduz na relação media-variância uma relação assimétrica, gerando uma distribuição de retornos não Gaussianos. Empiricamente, isto pode ser constatado na série histórica dos retornos das ações (FAMA, 1965; SARANYA; PRASANNA, 2014). Entretanto, em séries históricas de criptomoedas, que representam uma nova categoria de ativos de renda variável, os retornos apresentam distribuições acentuadamente não Gaussianas. Isso ocorre devido à alta volatilidade desses ativos e aos saltos observados na série temporal de seus retornos, conforme demonstrado em Castro *et al.* (2020).

A aplicação da metodologia clássica de Markowitz em carteiras com retornos não Gaussianos leva a uma subestimação do risco, pois a distribuição Gaussiana não é capaz de capturar as caudas pesadas características dos retornos não Gaussianos. Em outras palavras, os investidores estão assumindo um risco maior do que o indicado, enquanto a metodologia de Markowitz resulta em uma estimativa de risco menor. Para corrigir esta distorção, propõe-se alterar duas premissas da metodologia tradicional de Markowitz. A primeira, consiste na flexibilização da premissa dos retornos com distribuição Gaussiana para retornos de qualquer natureza probabilística. A segunda envolve o uso da medida de desempenho Ômega, em vez do índice de Sharpe. Essas modificações visam uma captura melhor da realidade dos retornos não Gaussianos e fornecer uma avaliação mais precisa do desempenho e do risco das carteiras.

A medida Ômega, proposta por Keating e Shadwick (2002), é uma medida de desempenho que leva em consideração todos os momentos da distribuição dos retornos, em contraste com o índice de Sharpe, que se baseia apenas na média e na variância. Essa característica faz da medida Ômega uma medida de desempenho universal, aplicável a qualquer carteira, independentemente da suposição adotada na modelagem probabilística dos retornos dos ativos. Ao considerar uma gama mais ampla de informações sobre a distribuição dos retornos, a medida Ômega oferece uma avaliação mais abrangente do desempenho e do risco de uma carteira.

A seguir, apresenta-se a equação (1) da medida  $\hat{\Omega}$ :

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b [1 - F(r_p)] dx}{\int_a^L F(r_p) dx} \quad (1)$$

Onde:

$\Omega(L)$ : medida  $\hat{\Omega}$  de desempenho da carteira

$L$ : retorno mínimo esperado da carteira

$F(r_p)$ : função de distribuição acumulada dos retornos  $r_p$  da carteira.

$(a, b)$ : domínio do retorno  $r_p$  da carteira, no caso mais geral,  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ .

Kazemi *et al.* (2004), desenvolveram uma fórmula alternativa da medida de desempenho  $\hat{\Omega}$ , expressa pela equação (2):

$$\Omega(L) = \frac{E[\max(r_p - L; 0)]}{E[\max(L - r_p; 0)]} \quad (2)$$

Sendo:

$E[\cdot]$ : operador de valor esperado.

$\max(\cdot)$ : operador máximo.

Na equação (2), o numerador é o valor esperado do excesso de ganho ( $r_p - L$ ) condicional a resultados positivos, ou seja, é o ganho esperado da carteira. E o denominador é o valor esperado da perda ( $L - r_p$ ) condicional a resultados negativos, isto é, a perda esperada da carteira. Portanto, funciona como uma medida de desempenho, ao relacionar um retorno ou ganho esperado, com o seu respectivo risco ou perda esperada.

As equações (1) e (2) são equivalentes, e podem ser aplicadas a qualquer carteira com retornos de qualquer natureza probabilísticas. Porém, para carteiras com retornos Gaussianos  $r_p \sim N(\mu_p, \sigma_p)$ , a medida  $\hat{\Omega}$  se expressa segundo a equação (3), como mostrado em Huarsaya *et al.* (2022).

$$\Omega(L) = \frac{\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) \Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)}{\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) \left[\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) - 1\right]} \quad (3)$$

Sendo:

$\varphi(\cdot)$ : a função de densidade  $N(0,1)$

$\Phi(\cdot)$ : a função de distribuição  $N(0,1)$

A equação (3), permite avaliar o desempenho de qualquer carteira localizada na fronteira eficiente, entretanto, para encontrar uma carteira em particular, precisa-se maximizar  $\Omega(L)$  em função de  $\mu_p$ , ou seja:

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \frac{\partial}{\partial \mu_p} \left( \frac{\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) \Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)}{\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) [\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) - 1]} \right) \quad (4)$$

A equação (4), pode ser simplificada para a expressão apresentada pela equação (5). Os detalhes dessa derivação se apresentam em Huarsaya *et al.* (2022).

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \frac{\partial}{\partial \mu_p} \left( \frac{\mu_p - L}{\sigma_p} \right) \quad (5)$$

Por compatibilidade com a metodologia tradicional de Markowitz, o parâmetro do retorno mínimo da carteira  $L$ , da medida  $\hat{\Omega}$ , deve ser igual ao retorno do ativo livre de risco  $r_f$ , ou seja,  $L = r_f$ , logo, a equação (5), pode ser reescrita como:

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \frac{\partial}{\partial \mu_p} \left( \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} \right) \quad (6)$$

A expressão  $\left(\frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}\right)$  da equação (6), é o índice de Sharpe ( $S_p$ ), ou seja:

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \max_{\mu_p}\{S_p\} \quad (7)$$

Com base nesta igualdade, conclui-se que, a carteira ótima  $(\mu_p^*, \sigma_p^*)$  selecionada pela medida de desempenho  $\hat{\Omega}$  é a mesma carteira selecionada pela medida de desempenho do índice de Sharpe, ou seja, em condições de retornos Gaussianos, igualando  $L = r_f$ , o índice de Sharpe e a medida  $\hat{\Omega}$  fornecem o mesmo resultado. No entanto, em condições de retornos não Gaussianas, os dois índices fornecerão resultados distintos. Nesses casos, a medida  $\hat{\Omega}$  é mais abrangente e adequada, pois leva em consideração todos os momentos da distribuição dos retornos.

Com base nesse resultado teórico, é possível estender a metodologia tradicional para um caso mais geral, realizando duas alterações. A primeira alteração envolve flexibilizar a suposição de retornos Gaussianos para permitir retornos de qualquer natureza probabilística. A segunda alteração consiste em substituir a medida de desempenho da carteira, do índice de Sharpe para a medida  $\hat{\Omega}$ . Com estas duas

alterações tem-se uma metodologia genérica para a otimização de carteiras com retornos não Gaussianos, que podem ser provocados por mudanças de regime.

### **3.2. Otimização de carteiras com retornos não Gaussianos provocados por quebras estruturais**

As quebras estruturais na série temporal dos retornos são causadas por eventos que alteram a natureza da série, levando-a a transitar entre um número infinito de estados possíveis de forma imprevisível e não recorrente ao longo do tempo. Em outras palavras, essas quebras introduzem um comportamento estocástico na relação média-variância, resultando em uma série temporal de retornos não Gaussianos. Essas mudanças estruturais são responsáveis por desvios significativos em relação às suposições tradicionais da distribuição Gaussiana.

Para lidar com esta situação, propõe-se a substituição do procedimento de estimação dos parâmetros da distribuição dos retornos, baseado em técnicas da estatística Frequentista por técnicas da estatística Bayesiana. Isto porque a estatística Bayesiana, tem a vantagem de combinar as informações públicas do mercado (dados históricos dos retornos) com informações privadas do investidor (visões prospectivas do mercado) permitindo corrigir a quebra estrutural. Nota-se que o teorema de Bayes não será aplicado diretamente nos dados da série temporal dos retornos, e sim nos parâmetros da distribuição dos retornos. Por esta razão, a correção das quebras estruturais será realizada em duas etapas: (i) na primeira etapa será aplicado a inferência Bayesiana dos parâmetros da distribuição dos retornos, e (ii) na segunda etapa será aplicada a transformação de Mahalanobis da série temporal dos retornos, corrigindo os dados originais refletidas pela distribuição a priori para um novo conjunto de dados que refletirão a nova distribuição a posteriori gerada pelo teorema de Bayes. Finalmente a nova série temporal corrigida será utilizada pelo mecanismo de otimização baseado na medida  $\hat{\Omega}$ .

#### **3.2.1. Inferência Bayesiana dos parâmetros da distribuição dos retornos**

A teoria moderna de carteiras realiza a alocação ótima dos ativos em função da média-variância da distribuição dos retornos. Na prática, estes parâmetros  $\mu$  e  $\Sigma$  são estimados a partir dos dados históricos do mercado, utilizando técnicas descritivas da estatística Frequentista. Estes dados históricos podem ser especificados por uma matriz  $X$  de “ $m$ ” linhas e “ $n$ ” colunas, como mostrada na equação (8).

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m \end{bmatrix} \quad (8)$$

Onde “ $n$ ” representa o número de variáveis aleatórias  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  dos ativos da carteira, e “ $m$ ” representa o número de observações de retornos do mercado, desta forma, o dado  $r_{ij}$  representa a observação “ $i$ ” da variável aleatória “ $j$ ” e o vetor linha  $\mathbf{x}_i$  representa a linha  $i$  da matriz  $\mathbf{X}$ .

Neste contexto, a estatística Frequentista estima os parâmetros  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$  da distribuição dos retornos através das equações (9) e (10).

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i^T \quad (9)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m (\mathbf{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}) (\mathbf{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})^T \quad (10)$$

Onde,  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  e  $\mathbf{S}$  representam as estatísticas amostrais dos parâmetros populacionais  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$ . De forma equivalente, estes parâmetros podem ser estimados pelas equações (11) e (12) (JOHNSON; WICHERN, 2007):

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n} \mathbf{X}^T \mathbf{1} \quad (11)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \mathbf{X}^T \left( \mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \right) \mathbf{X} \quad (12)$$

O procedimento de estimação dos parâmetros  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$  realizado pela estatística Frequentista não permite tratar quebras estruturais dos retornos, devido a que suas fórmulas dependem exclusivamente dos dados históricos do mercado. Existem cenários econômicos futuros, que possuem uma expectativa de saltos iminentes no retorno de determinados ativos, para estes casos, as estatística  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  e  $\mathbf{S}$ , estimados pela estatística Frequentista não serão capazes de capturar essas informações, devido ao fato de que o salto ainda não ocorreu e esse dado não está contemplado nos dados históricos de retornos do mercado.

Em contraste, a estatística Bayesiana estima os parâmetros  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$  combinando as informações públicas do mercado (dados históricos dos retornos) com informações privadas do investidor (visões prospectivas do mercado) permitindo, inserir informações

no processo de estimação dos parâmetros, obtendo estatísticas mais precisas, permitindo ao investidor corrigir as quebras estruturais na série temporal dos retornos. Embora a estatística Bayesiana possa ser aplicada na estimação, tanto do parâmetro  $\mu$  quanto do parâmetro  $\Sigma$ , as quebras estruturais afetam preferencialmente o parâmetro  $\mu$ , por esta razão, a seguir será realizada a inferência Bayesiana, somente do parâmetro  $\mu$ , mantendo a estimativa do parâmetro  $\Sigma$  com a mesmo valor,  $S$ , calculado pela estatística Frequentista.

Para isto, a estatística Bayesiana constrói uma distribuição a priori  $\mu \sim N(\hat{\mu}; \tau S)$ , baseada nas informações históricas dos retornos, e uma distribuição de verossimilhança  $P\mu \sim N(Q; \Omega)$ , baseada nas informações prospectivas do investidor, e através do teorema de Bayes é gerado uma nova distribuição a posteriori  $\mu|Q \sim N(\tilde{\mu}; \tilde{S})$ , que combina probabilisticamente as duas informações anteriores. A distribuição a priori  $\mu \sim N(\hat{\mu}; \tau S)$  é definida por uma distribuição Gaussiana com média  $\hat{\mu}$ , calculada pela equação (11), e uma matriz de covariância  $\tau S$ , onde  $S$  é calculada pela equação (12), e  $\tau$  um fator de encolhimento da matriz de covariância  $S$ . Este fator tipicamente assume valores entre 0,01 e 0,05 (IDZOREK, 2007). A distribuição de verossimilhança  $P\mu \sim N(Q; \Omega)$  é definida por uma distribuição Gaussiana com média  $Q$  e covariância  $\Omega$ . A matriz  $P$  que multiplica o parâmetro  $\mu$  permite especificar as visões prospectivas do mercado sob a ótica do investidor. Estas visões permitem especificar as quebras estruturais dos retornos na estrutura de ativos da carteira.

A seguir, será mostrado um exemplo de como construir estas visões prospectivas do investidor, usando as equações (13) e (14).

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} 8\% \\ 13\% \\ 18\% \\ 25\% \\ 30\% \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$S = \begin{bmatrix} 12\% & 6\% & -1\% & 3\% & 5\% \\ 6\% & 20\% & -1\% & 2\% & 4\% \\ -1\% & -1\% & 30\% & 5\% & -1\% \\ 3\% & 2\% & 5\% & 40\% & 6\% \\ 5\% & 4\% & -1\% & 6\% & 50\% \end{bmatrix} \quad (14)$$

Esta carteira está formada por cinco ativos, cujos retornos médios (calculados usando a equação 9) serão denotados por  $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\}$ , componentes do vetor  $\hat{\mu}$  da equação 13. Suponha que o investidor possua três visões de mercado, ou seja, três

eventuais quebras estruturais. Estas quebras estruturais podem ser divididas em dois grupos: (i) Um primeiro grupo formado por quebras estruturais descorrelacionadas, as quais serão denominadas como “visões absolutas” do investidor e; (ii) Um segundo grupo formado por quebras estruturais correlacionadas, as quais serão denominadas “visões relativas” do investidor.

A Tabela 1 mostra a especificação de três visões de mercado, das quais duas visões são absolutas e uma visão é relativa.

Tabela 1. Exemplo de visões prospectivas do mercado

Visão Absoluta	$\mu_1 = N(16\%; 1\%^2)$
Visão Relativa	$\mu_3 - \mu_2 = N(1\%; 1\%^2)$
Visão Absoluta	$\mu_5 = N(15\%; 1\%^2)$

Fonte: Elaborado pelos autores

Na primeira visão de mercado de tipo absoluta, o investidor tem a expectativa de que a média do ativo 1, mude de um valor fixo de  $\mu_1 = 8\%$  para um novo valor especificado por uma distribuição Gaussiana com média de 16% e desvio padrão de 1%, ou seja,  $\mu_1 \sim N(16\%; 1\%^2)$ . Nota-se que esta distribuição não se refere à distribuição dos dados do ativo 1, e sim à distribuição do parâmetro  $\mu_1$  do ativo 1. Além disso, nota-se, que esta visão do investidor é uma visão otimista porque a expectativa do investidor é um salto na rentabilidade do ativo 1.

Na segunda visão de mercado de tipo relativa, o investidor tem a expectativa de que a diferença entre as médias do ativo 3 menos a média do ativo 2, seja uma distribuição Gaussiana com média de 1% e desvio padrão de 1%, ou seja,  $\mu_3 - \mu_2 = N(1\%; 1\%^2)$ . Nota-se que esta visão relativa se trata de uma quebra estrutural que impõe uma correlação entre os ativos 2 e 3, de tal forma que a diferença de rentabilidades seja uma constante.

Na terceira visão de mercado de tipo absoluta, o investidor tem a expectativa de que a média do ativo 5, mude de um valor fixo de  $\mu_1 = 30\%$  para um novo valor especificado por uma distribuição Gaussiana com média de 15% e desvio padrão de 1%, ou seja,  $\mu_5 \sim N(15\%; 1\%^2)$ . Nota-se que esta visão do investidor é uma visão pessimista porque a expectativa do investidor é uma queda na rentabilidade do ativo 5.

Após o investidor definir as suas visões de mercado, o próximo passo é preencher os parâmetros da distribuição de verossimilhança  $\mathbf{P}\boldsymbol{\mu} \sim N(\mathbf{Q}; \boldsymbol{\Omega})$ . Para preencher a matriz  $\mathbf{P}$ , previamente pode-se montar uma tabela auxiliar, como a Tabela 2.

Tabela 2. Tabela auxiliar para o preenchimento da matriz  $\mathbf{P}$ 

$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$
1				
	-1	1		
				1

Fonte: Elaborado pelos autores

Cada linha da tabela auxiliar representa uma visão prospectiva do investidor. Por exemplo, a primeira visão do tipo absoluta é representada pelo número 1 embaixo da coluna  $p_1$ , a segunda visão do tipo relativa é representada pelo número -1 embaixo da coluna  $p_2$  e pelo número 1 embaixo da coluna  $p_3$ , e a terceira visão do tipo absoluta é representada pelo número 1 embaixo da coluna  $p_5$ .

A Tabela 2, pode ser sintetizada pela matriz  $\mathbf{P}$  da equação (15)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Cabe sublinhar que a somatória de cada linha da matriz deve ser “1” para o caso das visões absolutas e “0” para o caso das visões relativas. Para preencher o vetor  $\mathbf{Q}$  usam-se as informações da Tabela 1, o vetor  $\mathbf{Q}$  é formado pelas médias das visões, assim:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 16\% \\ 1\% \\ 15\% \end{bmatrix} \quad (16)$$

Finalmente, para preencher a matriz de covariância  $\boldsymbol{\Omega}$ , utilizam-se novamente as informações da Tabela 1, a matriz de covariância  $\boldsymbol{\Omega}$  é formada pelas variâncias das visões, assim:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 1\%^2 & & \\ & 1\%^2 & \\ & & 1\%^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Aplicando-se o teorema de Bayes é gerada uma nova distribuição a posteriori  $\boldsymbol{\mu}|\mathbf{Q} \sim N(\tilde{\boldsymbol{\mu}}; \tilde{\mathbf{S}})$  em função da distribuição a priori  $\boldsymbol{\mu} \sim N(\hat{\boldsymbol{\mu}}; \tau\mathbf{S})$  e a distribuição de verossimilhança  $\mathbf{P}\boldsymbol{\mu} \sim N(\mathbf{Q}; \boldsymbol{\Omega})$ . Os parâmetros da distribuição a posteriori são calculados através das equações (18) e (19) (IDZOREK, 2007).

$$\tilde{\mathbf{S}} = [(\tau\mathbf{S})^{-1} + \mathbf{P}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{P}]^{-1} \quad (18)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \tilde{\mathbf{S}}[(\tau\mathbf{S})^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{P}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{Q}] \quad (19)$$

Substituindo os valores de  $\tilde{\mathbf{S}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{\Omega}$  na equação 19, com  $\tau = 0,025$  (IDZOREK, 2007), encontra-se a nova média  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$  estimada pela estatística Bayesiana.

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} 9,37\% \\ 14,13\% \\ 16,75\% \\ 24,30\% \\ 22,12\% \end{bmatrix} \quad (20)$$

Nota-se que a estimação do parâmetro  $\boldsymbol{\mu}$ , realizado pela estatística Frequentista  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  ( $\mu_1=8\%$ ,  $\mu_2=13\%$ ,  $\mu_3=18\%$ ,  $\mu_4=25\%$ ,  $\mu_5=30\%$ ) resulta em valores diferentes aos obtidos pela estatística Bayesiana  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$  (equação 20).

Aplicando o modelo clássico de Markowitz, a Tabela 3 mostra os pesos obtidos dos 5 ativos que compõem a carteira ótima (carteira tangente entre a fronteira eficiente e a linha de mercado de capitais), considerando um ativo livre de risco  $r_f = 5\%$ . Ao usar os parâmetros estimados pela estatística Frequentista a carteira ótima resulta na distribuição Gaussiana  $N(\boldsymbol{\mu}_p^*, \sigma_p^{*2}) = N(23,8\%; 36,74\%^2)$ , e, no caso de usar os parâmetros estimados pela estatística Bayesiana, a carteira ótima é uma nova distribuição Gaussiana  $N(19,2\%; 32,1\%^2)$ .

Tabela 3. Pesos  $W(i)$  dos 5 ativos nas carteiras ótimas

	Estatística Frequentista	Estatística Bayesiana
$W(1)$	-12,35%	- 0,46%
$W(2)$	24,61%	27,77%
$W(3)$	28,06%	25,38%
$W(4)$	27,21%	27,46%
$W(5)$	32,46%	19,84%

Fonte: Elaborado pelos autores

### 3.2.2. Transformação de Mahalanobis da série temporal dos retornos

Na etapa anterior, foi aplicada a inferência Bayesiana para corrigir as quebras estruturais a nível dos parâmetros da distribuição dos retornos. Nesta etapa serão corrigidas as quebras estruturais a nível dos dados dos retornos, ou seja, a série temporal original dos retornos, representada pela distribuição a priori  $N(\hat{\boldsymbol{\mu}}; \mathbf{S})$ , será corrigido através da transformação de Mahalanobis, para refletir a distribuição a posteriori  $N(\tilde{\boldsymbol{\mu}}; \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{S}})$  obtida pelo teorema de Bayes.

Esta transformação pode ser realizada através de dois passos: (i) no primeiro passo é realizada a transformação de dados, da distribuição  $N(\hat{\mu}; S)$  para a distribuição  $N(\mathbf{0}; I)$ , sendo  $I$  uma matriz unitária que possui a mesma dimensão que a matriz  $S$ , esta transformação de dados é conhecida como a transformação de Mahalanobis, a qual é definida pela equação (21) (HÄRDLE; SIMAR, 2019):

$$y = S^{-1/2}(x - \hat{\mu}) \tag{21}$$

onde  $y$ , representa uma nova variável aleatória com distribuição  $y \sim N(\mathbf{0}, I)$ , e (ii) no segundo passo é realizada uma transformação de dados da distribuição  $N(\mathbf{0}; I)$  para a distribuição  $N(\tilde{\mu}; S + \tilde{S})$ . Esta transformação é definida pela equação (22).

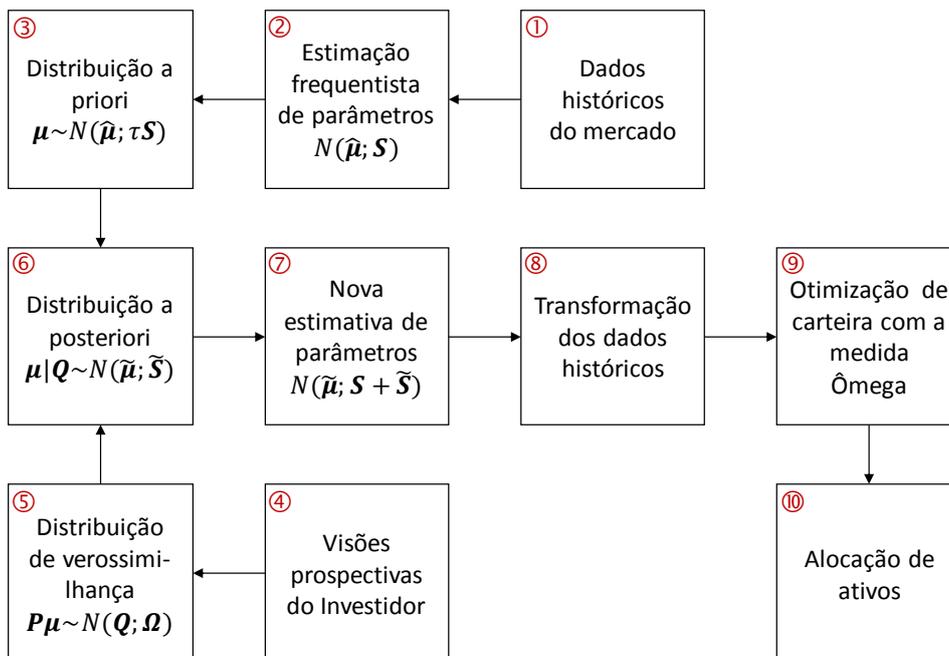
$$x|y = (S + \tilde{S})^{1/2} y + \tilde{\mu} \tag{22}$$

O novo conjunto de dados definido pela equação (22) é a nova série temporal dos retornos corrigida das quebras estruturais.

### 3.2.3. Diagrama esquemático operacional

Na Figura 1, mostra-se o diagrama esquemático das etapas operacionais no processo de otimização de carteiras com retornos não Gaussianos provocados por quebras estruturais.

Figura 1. Sequência de etapas no processo de otimização da carteira



Fonte: Elaborado pelos autores

A Etapa 1, consiste na coleta dos dados históricos do mercado, o resultado desta etapa será a matriz  $\mathbf{X}$  da equação (8).

A Etapa 2, consiste na estimativa dos parâmetros  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  e  $\mathbf{S}$  calculada pelas equações (11) e (12). Esta estimativa é realizada pela metodologia da estatística Frequentista, o resultado desta etapa será uma distribuição Gaussiana dos dados, em formato analítico  $N(\hat{\boldsymbol{\mu}}; \mathbf{S})$ .

A Etapa 3, consiste na construção da distribuição a priori do parâmetro  $\boldsymbol{\mu} \sim N(\hat{\boldsymbol{\mu}}; \tau\mathbf{S})$  em função das estatísticas  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  e  $\mathbf{S}$  calculadas previamente na Etapa 2.

A Etapa 4, consiste na especificação das visões prospectivas de mercado sob a ótica do investidor, ou seja, a especificação das quebras estruturais dos retornos (ilustrado com um exemplo na Tabela 1).

A Etapa 5, consiste na construção da distribuição de verossimilhança  $P\boldsymbol{\mu} \sim N(\mathbf{Q}; \boldsymbol{\Omega})$  em função das visões prospectivas do mercado do investidor da Etapa 4, as matrizes  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  e  $\boldsymbol{\Omega}$  devem ser preenchidas de acordo com a metodologia exposta na seção 3.2.1.

A Etapa 6, consiste na aplicação do teorema de Bayes para gerar a distribuição a posteriori do parâmetro  $\boldsymbol{\mu} | \mathbf{Q} \sim N(\tilde{\boldsymbol{\mu}}; \tilde{\mathbf{S}})$  em função da distribuição a priori e da distribuição de verossimilhança das Etapas 3 e 5 respectivamente.

A Etapa 7, consiste na atualização do parâmetro  $\boldsymbol{\mu}$ , substituindo a estatística  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ , calculada pela estatística Frequentista, pela estatística  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ , calculada pela estatística Bayesiana. Nota-se que o resultado desta etapa é uma distribuição Gaussiana  $N(\tilde{\boldsymbol{\mu}}; \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{S}})$ , expressa num formato analítico.

A Etapa 8, consiste em transformar a série temporal dos retornos (dados históricos do mercado) da distribuição  $N(\hat{\boldsymbol{\mu}}; \mathbf{S})$  para a distribuição  $N(\tilde{\boldsymbol{\mu}}; \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{S}})$ . O resultado desta etapa será uma nova série temporal dos retornos corrigida das quebras estruturais.

A Etapa 9, consiste na otimização da carteira utilizando a medida Ômega. O resultado desta etapa é a carteira otimizada representado pelas frações ótimas de investimento em cada ativo.

Finalmente, a Etapa 10, consiste na alocação de ativos, ou seja, na alocação de recursos financeiros na carteira otimizada.

## 4. Experimentos Numéricos

### 4.1. Seleção de carteiras para os experimentos numéricos

A maneira de ilustração da metodologia, foram construídas quatro carteiras formadas por ações e criptomoedas. Entre as ações foram selecionadas cinco empresas líderes do índice Dow Jones: Apple (AAPL), Pfizer (PFE), JPMorgan Chase (JPM), Verizon (VZ) e Coca-Cola (KO). Entre as criptomoedas foram selecionadas as três de maior valor de mercado: Bitcoin (BTC), Ethereum (ETH) e Ripple (XRP). Os preços das ações foram extraídos do site <https://finance.yahoo.com> e das criptomoedas do site <https://coinmarketcap.com>, sendo o período de análise compreendido no intervalo entre 01/09/2017 e 30/04/2023. Esta seleção de ações e criptomoedas basicamente é para fins ilustrativos, o investidor na prática poderá selecionar previamente um universo de possíveis ativos a investir, em função das suas preferências e expectativas de risco-retorno.

Na Tabela 4, mostra-se a composição das quatro carteiras para análise: a carteira C5 é formado por 5 ações, a carteira C6 é formada por 5 ações e o BTC, e as carteiras C7 e C8, são acrescentadas respectivamente ETH e XRP.

Tabela 4. Composição das quatro carteiras para análise

	AAPL	PFE	JPM	VZ	KO	BTC	ETH	XRP
Carteira C5	✓	✓	✓	✓	✓			
Carteira C6	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Carteira C7	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Carteira C8	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Fonte: Elaborado pelos autores

A seguir, a Tabela 5 mostra as principais estatísticas dos retornos mensais dos ativos, a Tabela 6, mostra a matriz de correlação dos retornos mensais dos ativos, e a Tabela 7 mostra a matriz de covariância dos retornos mensais dos ativos.

Tabela 5. Principais estatísticas dos retornos mensais

	AAPL	PFE	JPM	VZ	KO	BTC	ETH	XRP
Média	1,48%	0,21%	0,34%	-0,27%	0,58%	1,95%	1,16%	1,08%
Desvio-padrão	9,44%	7,08%	7,67%	4,95%	5,48%	22,20%	29,42%	43,69%
Valor Mínimo	-21,86%	-14,91%	-29,99%	-12,88%	-23,41%	-46,22%	-78,85%	-102,53%
Valor Máximo	19,85%	20,80%	16,20%	10,39%	12,41%	46,19%	58,80%	219,69%
Assimetria	-0,4109	0,4260	-0,9238	-0,5052	-1,4447	-0,0703	-0,1333	2,0644
Curtose	2,54	3,53	5,73	3,05	7,47	2,49	2,77	12,04
Jarque-Bera Test	2,51	2,84	30,77	2,90	80,22	0,78	0,35	279,86

Fonte: Elaborado pelos autores

Tabela 6. Matriz de correlações dos retornos mensais

	AAPL	PFE	JPM	VZ	KO	BTC	ETH	XRP
APPL	100,00%	28,14%	42,57%	12,43%	29,96%	36,17%	33,71%	10,85%
PFE	28,14%	100,00%	31,01%	37,47%	31,90%	7,92%	16,41%	19,47%
JPM	42,57%	31,01%	100,00%	35,51%	50,59%	31,45%	30,71%	10,68%
VZ	12,43%	37,47%	35,51%	100,00%	46,73%	1,82%	-2,80%	6,56%
KO	29,96%	31,90%	50,59%	46,73%	100,00%	18,98%	16,03%	1,65%
BTC	36,17%	7,92%	31,45%	1,82%	18,98%	100,00%	74,78%	46,86%
ETH	33,71%	16,41%	30,71%	-2,80%	16,03%	74,78%	100,00%	57,17%
XRP	10,85%	19,47%	10,68%	6,56%	1,65%	46,86%	57,17%	100,00%

Fonte: Elaborado pelos autores

Tabela 7. Matriz de variância- covariância dos retornos mensais

	AAPL	PFE	JPM	VZ	KO	BTC	ETH	XRP
APPL	0,879%	0,185%	0,304%	0,057%	0,153%	0,747%	0,923%	0,441%
PFE	0,185%	0,494%	0,166%	0,129%	0,122%	0,123%	0,337%	0,593%
JPM	0,304%	0,166%	0,580%	0,133%	0,210%	0,528%	0,683%	0,353%
VZ	0,057%	0,129%	0,133%	0,241%	0,125%	0,020%	-0,040%	0,140%
KO	0,153%	0,122%	0,210%	0,125%	0,296%	0,228%	0,255%	0,039%
BTC	0,747%	0,123%	0,528%	0,020%	0,228%	4,857%	4,813%	4,478%
ETH	0,923%	0,337%	0,683%	-0,040%	0,255%	4,813%	8,531%	7,241%
XRP	0,441%	0,593%	0,353%	0,140%	0,039%	4,478%	7,241%	18,804%

Fonte: Elaborado pelos autores

Na Tabela 5, ressalta-se que os valores da média, desvio padrão, valores mínimos e máximos, são muito mais expressivos nas criptomoedas do que nas ações tradicionais. Em relação ao teste de normalidade de Jarque e Bera (1980), enquanto mais próximo de zero indicaria maior aproximação a uma distribuição gaussiana, apreciando-se que no período da análise, algumas ações e criptomoedas claramente não apresentam distribuições de retornos Gaussianos, com maior ênfase na criptomoeda do Ripple (XRP). Por outro lado, na Tabela 6, não se aprecia que haja uma forte correlação entre ações e criptomoedas, entretanto, as criptomoedas são fortemente correlacionadas. A matriz de variância-covariância da Tabela 7 representa a estimativa do parâmetro  $\Sigma$ , calculado segundo a equação (10).

## 4.2. Experimentos em carteiras com retornos não Gaussianos provocados por mudanças de regime

Nestes experimentos foram considerados dois cenários para os dados históricos do mercado: (i) no primeiro cenário, assume-se que os dados históricos do mercado não possuem mudanças de regime, assim, a otimização da carteira foi realizada pela metodologia clássica Markowitz e; (ii) no segundo cenário, assume-se que os dados históricos do mercado possuem mudanças de regime, assim, a otimização da carteira foi realizada pela medida  $\hat{\Omega}$ , como exposto na seção 3.1.

Nota-se que a metodologia de Markowitz utiliza os parâmetros (média-variância) da estatística Frequentista, e a metodologia de  $\hat{\Omega}$  utiliza a distribuição numérica dos dados, ou seja, a metodologia  $\hat{\Omega}$  utiliza o formato real da distribuição dos dados. Para ambas metodologias foi definido  $L = r_f = 0,21\%$  ao mês, o qual, é uma proxy da taxa mensal de retorno de um papel do tesouro americano. A seguir, nas Tabelas 8 e 9, apresentam-se os resultados obtidos da alocação de ativos (pesos) por ambas as metodologias.

Tabela 8. Alocação de ativos realizadas pela metodologia de Markowitz

	AAPL	PFE	JPM	VZ	KO	BTC	ETH	XRP
Carteira C5	72,31%	0,00%	0,00%	0,00%	27,69%			
Carteira C6	66,87%	0,00%	0,00%	0,00%	25,12%	8,01%		
Carteira C7	66,87%	0,00%	0,00%	0,00%	25,12%	8,01%	0,00%	
Carteira C8	66,87%	0,00%	0,00%	0,00%	25,12%	8,01%	0,00%	0,00%

Fonte: Elaborado pelos autores

Tabela 9. Alocação de ativos realizada pela metodologia  $\hat{\Omega}$

	AAPL	PFE	JPM	VZ	KO	BTC	ETH	XRP
Carteira C5	62,28%	0,11%	0,12%	0,07%	37,42%			
Carteira C6	51,59%	0,10%	0,11%	0,06%	39,87%	8,27%		
Carteira C7	51,25%	0,51%	0,55%	0,32%	39,04%	8,09%	0,23%	
Carteira C8	51,61%	0,10%	0,11%	0,06%	39,85%	8,18%	0,05%	0,04%

Fonte: Elaborado pelos autores

Interessante observar que a metodologia de Markowitz concentra a carteira nos ativos na Apple (AAPL), Coca-Cola (KO) e Bitcoin (BTC), entretanto, a metodologia de  $\hat{\Omega}$  diversifica a carteira entre todos os ativos. A explicação para isso, é que a metodologia  $\hat{\Omega}$  considera o formato real da distribuição dos retornos, enquanto que

a metodologia de Markowitz considera apenas os dois primeiros momentos da distribuição dos retornos (média e matriz de variância-covariância).

A Tabela 10 mostra as estatísticas da média  $\mu_p$ , desvio padrão  $\sigma_p$  e a medida de risco CVaR(5%) (Conditional Value at Risk) da carteira ótima do investidor, em cada caso.

Tabela 10. Estatísticas de risco-retorno das carteiras ótimas: Markowitz vs Ômega

Markowitz	$\mu_p$	$\sigma_p$	CVaR	Ômega	$\mu_p$	$\sigma_p$	CVaR_H
Carteira C5	1,23%	7,43%	14,09%	Carteira C5	1,14%	6,79%	14,23%
Carteira C6	1,29%	7,69%	14,58%	Carteira C6	1,15%	6,81%	14,74%
Carteira C7	1,29%	7,69%	14,58%	Carteira C7	1,14%	6,80%	14,73%
Carteira C8	1,29%	7,69%	14,58%	Carteira C8	1,15%	6,81%	14,74%

Fonte: Elaborado pelos autores

Nos resultados da Tabela 3, o CVaR, para o caso da metodologia de Markowitz foi calculado pela equação (23).

$$CVaR_{\alpha}(r_g) = \mu_g - \frac{\sigma_g}{\alpha} \varphi[\Phi^{-1}(\alpha)] \quad (23)$$

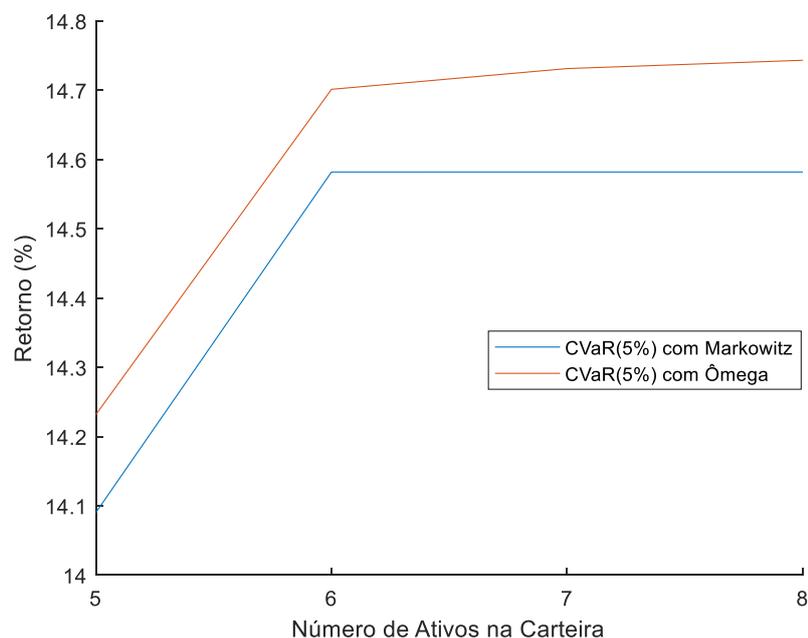
Onde  $\alpha$  representa o percentil de corte,  $\varphi$  representa a função de densidade da distribuição Gaussiana  $N(0,1)$ ,  $\Phi^{-1}$  representa a função inversa da distribuição Gaussiana  $N(0,1)$  e  $(\mu_g, \sigma_g)$  representa a média e o desvio padrão da carteira ótima do investidor.

No caso da metodologia de Ômega, calculou-se o CVaR\_H, proveniente dos dados históricos dos retornos, ou seja, as amostras da distribuição empírica de retornos da carteira, foram ordenadas de menor a maior e na sequência foi extraída a amostra que representa o percentil 5% dos dados, e calculou-se a sua média ponderada.

Na Tabela 10, nota-se que as médias e os desvios padrões das carteiras calculados pela metodologia de Markowitz tendem em geral a serem a maiores que os obtidos pela metodologia Ômega, entretanto, o CVaR das carteias calculadas pela metodologia de Markowitz são em todos os casos menores que o CVaR\_H das carteiras calculadas pela metodologia Ômega, exibido graficamente na Figura 2.

Este resultado mostra que a metodologia Ômega, calcula um risco maior para a carteira que a metodologia de Markowitz, ou seja, a metodologia de Markowitz subestimaria o risco da carteira podendo levar ao investidor a decisões deficientes.

Figura 2. Comparação do risco das carteiras com o CVaR



Fonte: Elaborado pelos autores

### 4.3. Experimentos em carteiras com retornos não Gaussianos provocados por quebras estruturais

#### 4.3.1. Aplicação da etapa da inferência Bayesiana

O experimento numérico desta etapa consiste em corrigir a quebra estrutural a nível dos parâmetros da distribuição dos retornos. Para isto, foram comparadas as carteiras otimizadas, baseadas nos parâmetros da distribuição estimados pela estatística Frequentista versus a estatística Bayesiana (conectando a saída da Etapa 7 à entrada da Etapa 9). Nota-se que ambas as configurações encontram-se em um ambiente Gaussiano, consequentemente, as carteiras serão comparadas utilizando a metodologia tradicional de Markowitz com a diferença de que na primeira configuração, o parâmetro  $\mu$  da distribuição dos retornos será a estatística  $\hat{\mu}$  estimada pela estatística Frequentista, enquanto na segunda configuração, o parâmetro  $\mu$  será a estatística  $\tilde{\mu}$  estimada pela estatística Bayesiana. A diferença entre a estatística  $\hat{\mu}$  e  $\tilde{\mu}$  é que a primeira leva em consideração apenas os dados históricos dos retornos do mercado, enquanto a segunda leva em consideração, além dos dados históricos dos retornos mercado, as visões prospectivas do mercado sob a ótica do investidor e, estas visões prospectivas do mercado

permitem inserir no processo de estimação do parâmetro  $\mu$  as informações de quebras estruturais dos retornos dos ativos da carteira.

Na Tabela 11, mostra-se as especificações de três visões de mercado do investidor, das quais duas visões são absolutas e uma visão é relativa.

Tabela 11. Visões prospectivas do mercado do investidor

Visão Absoluta	$\mu_{APPL} = N(0,5\%; 0,1\%^2)$
Visão Absoluta	$\mu_{PFE} = N(3\%; 0,1\%^2)$
Visão Relativa	$\mu_{ETH} - \mu_{XPR} = N(0,1\%; 0,1\%^2)$

Fonte: Elaborado pelos autores

Na primeira visão de mercado de tipo absoluta, o investidor tem a expectativa que a empresa Apple (APPL) tenha uma queda na sua rentabilidade, como consequência de vários fatores, tais como: (i) Crise econômica mundial causada pela Covid-19 e da guerra Rússia-Ucrânia; (ii) Forte concorrência das empresas chinesas e; (iii) Crise de oferta no mercado de chips (semicondutores) pelo consumo de outras indústrias como carros elétricos, televisores, celulares, etc. O investidor tem a expectativa de que a rentabilidade atual da empresa mude de  $\mu_{APPL} = 1,55\%$  a.m. para um novo valor especificado por uma distribuição Gaussiana com média de  $1\%$  a.m. e desvio padrão de  $0,1\%$ , ou seja,  $\mu_1 \sim N(1\%; 0,1\%^2)$ . Nota-se que esta distribuição não se refere à distribuição dos dados da Apple, e sim a distribuição do parâmetro  $\mu_{APPL}$  da Apple.

Na segunda visão de mercado de tipo absoluta, o investidor tem a expectativa de que as empresas do setor de vacinas, como a Pfizer (PFE), tenham uma rentabilidade expressiva por causa do período da pandemia e pós-pandemia do Covid-19, ou seja, o retorno da Pfizer, poderia mudar do valor atual de  $\mu_{PFE} = 0,3\%$  a.m. para um novo valor especificado por uma distribuição Gaussiana com média de  $3\%$  a.m. e desvio padrão de  $0,1\%$ , ou seja,  $\mu_{PFE} \sim N(3\%; 0,1\%^2)$ .

Na terceira visão de mercado é de tipo relativo, o investidor tem a expectativa de que a criptomoeda Ethereum (ETH) perca relevância a longo prazo e a sua rentabilidade se aproxime da criptomoeda Ripple (XRP), ou seja, que a diferença entre as médias do Ethereum e do Ripple, seja uma distribuição Gaussiana com média de  $0,1\%$  e desvio padrão de  $0,1\%$ , assim,  $\mu_{ETH} - \mu_{XPR} = N(0,1\%; 0,1\%^2)$ .

A Tabelas 12 apresenta as alocações de ativos (pesos) usando a estimação Bayesiana, procedimento descrito na seção 3.2.1.

Tabela 12. Alocação de ativos realizada com a estimação Bayesiana

	AAPL	PFE	JPM	VZ	KO	BTC	ETH	XRP
Carteira C5	15,24%	65,34%	0,00%	0,00%	19,42%			
Carteira C6	12,48%	66,04%	0,00%	0,00%	18,04%	3,44%		
Carteira C7	12,48%	66,04%	0,00%	0,00%	18,04%	3,44%	0,00%	
Carteira C8	12,81%	65,47%	0,00%	0,00%	18,23%	2,72%	0,00%	0,78%

Fonte: Elaborado pelos autores

Na Tabela 8 (alocação de ativos realizadas pela metodologia de Markowitz) e na Tabela 12, observa-se que ambas metodologias determinam distintas alocações de ativos como consequência dos efeitos das visões de mercado incorporadas no processo de estimação do parâmetro  $\mu$  da distribuição dos dados de mercado.

Nota-se que as alocações de investimentos da Apple e da Pfizer sofreram mudanças drásticas como produto das visões absolutas do mercado, para o caso Apple, a visão prospectiva do investidor foi uma quebra estrutural do retorno negativo e comprova-se que as alocações sofreram uma redução nos pesos das carteiras, analogamente, para o caso da Pfizer, a visão prospectiva do investidor foi uma quebra estrutural do retorno positivo e comprova-se que as alocações sofreram um incremento nos pesos das carteiras.

Para o caso da visão de mercado de tipo relativo, a visão prospectiva do investidor foi uma quebra estrutural do retorno correlacionando o retorno da criptomoeda Ethereum e Ripple, a qual é comprovada na alocação de pesos semelhantes, conforme a Tabela 12.

A Tabela 13, mostra as estatísticas da carteira ótima do investidor, usando os pesos da estimação Bayesiana. Por sua vez, a maneira de comparação se exibem as estatísticas obtidas usando a estimação Frequentista (apresentado também na Tabela 10). Em ambos os casos se utilizou a metodologia de Markowitz para a otimização.

Tabela 13. Estatísticas de risco-retorno das carteiras ótimas: Frequentista vs Bayesiana

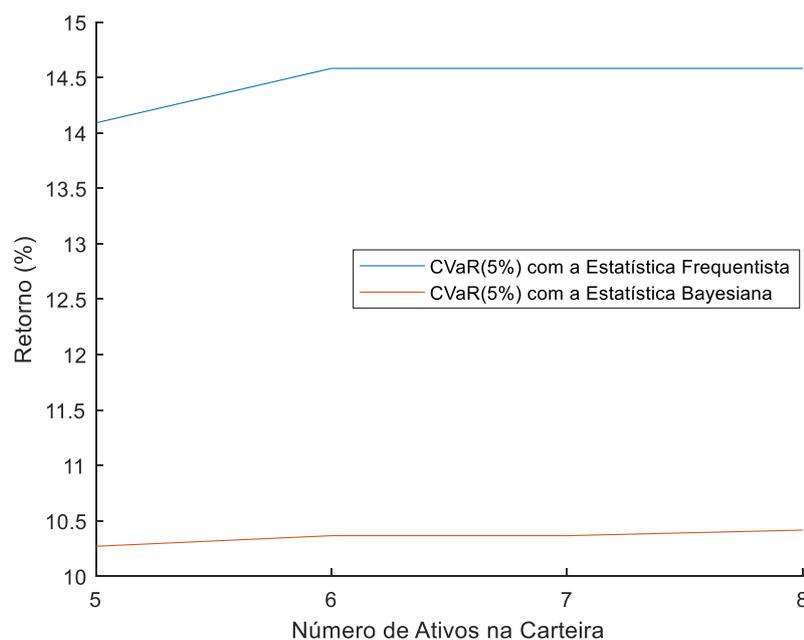
Frequentista	$\mu_p$	$\sigma_p$	CVaR	Bayesiana	$\mu_p$	$\sigma_p$	CVaR
Carteira C5	1,23%	7,43%	14,09%	Carteira C5	1,47%	5,69%	10,27%
Carteira C6	1,29%	7,69%	14,58%	Carteira C6	1,50%	5,75%	10,37%
Carteira C7	1,29%	7,69%	14,58%	Carteira C7	1,50%	5,75%	10,37%
Carteira C8	1,29%	7,69%	14,58%	Carteira C8	1,50%	5,78%	10,42%

Fonte: Elaborado pelos autores

A Figura 3, mostra graficamente o CVaR (5%) calculado por ambas as metodologias. A Figura 3, mostra-se o comportamento do CVaR (5%) para a carteira

ótima do investidor, entretanto, a diferença entre o CVaR Frequentista e Bayesiano é que o CVaR Bayesiano considera as visões de mercado sob a ótica do investidor. O impacto das visões do mercado provocou uma diminuição do risco da carteira, porém, poderia ter acontecido o contrário com outros tipos de visões.

Figura 3. Comparação do risco das carteiras com o CVaR (Frequentista vs Bayesiano)



Fonte: Elaborado pelos autores

#### 4.3.2. Aplicação da etapa da transformação de Mahalanobis

O experimento numérico desta etapa consiste em corrigir a quebra estrutural a nível dos dados da série temporal dos retornos (Etapa 8), seguindo o procedimento apresentado na seção 3.2.2. A aplicação da metodologia  $\hat{\Omega}$  (Etapa 9) nos dados transformados fecharia o ciclo completo do diagrama da Figura 1. A seguir, na Tabela 14, apresentam-se os resultados obtidos da alocação de ativos (pesos) usado  $\hat{\Omega}$  com os dados transformados.

Tabela 14. Alocação de ativos realizada com a metodologia  $\hat{\Omega}$ .

	AAPL	PFE	JPM	VZ	KO	BTC	ETH	XRP
Carteira C5	11,48%	62,31%	0,07%	0,03%	26,12%			
Carteira C6	6,47%	67,03%	0,48%	0,18%	21,54%	4,30%		
Carteira C7	6,40%	66,68%	0,48%	0,17%	21,97%	4,22%	0,08%	
Carteira C8	6,97%	69,23%	0,48%	0,18%	17,95%	4,95%	0,08%	0,17%

Fonte: Elaborado pelos autores

Na Tabela 12 (alocação de ativos realizada com a estimação Bayesiana) e na Tabela 14, observa-se que ambas as metodologias determinam distintas alocações de ativos, mesmo que estejam utilizando as mesmas visões do mercado. Isto devido a que a metodologia de estimação Bayesiana utiliza a média e variância, enquanto a metodologia  $\hat{\Omega}$  utiliza a distribuição de real dos dados transformados.

A Tabela 15, mostra as estatísticas da carteira ótima do investidor, usando os pesos da Tabela 14 (otimização pela medida  $\hat{\Omega}$ ). Por sua vez, a maneira de comparação se exibem as estatísticas obtidas pela estimação Bayesiana usando a metodologia de Markowitz (apresentado também na Tabela 13).

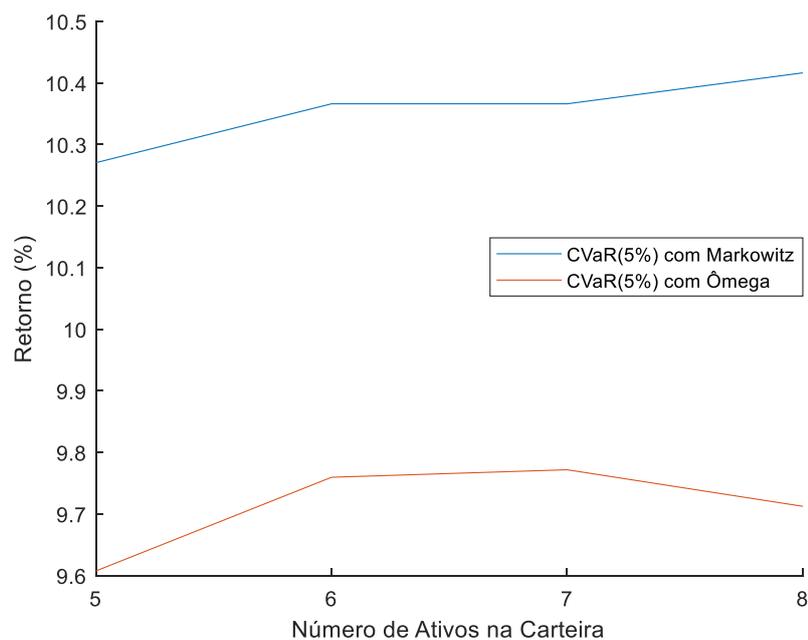
Tabela 15. Estatísticas de risco-retorno das carteiras ótimas Bayesianas: Markowitz vs  $\hat{\Omega}$

Markowitz	$\mu_p$	$\sigma_p$	CVaR	$\hat{\Omega}$	$\mu_p$	$\sigma_p$	CVaR_H
Carteira C5	1,47%	5,69%	10,27%	Carteira C5	1,43%	5,54%	9,61%
Carteira C6	1,50%	5,75%	10,37%	Carteira C6	1,48%	5,75%	9,76%
Carteira C7	1,50%	5,75%	10,37%	Carteira C7	1,48%	5,73%	9,77%
Carteira C8	1,50%	5,78%	10,42%	Carteira C8	1,51%	5,89%	9,71%

Fonte: Elaborado pelos autores

A Figura 4, mostra graficamente o CVaR (5%) da carteira ótima do investidor, para ambas as metodologias.

Figura 4 Comparação do risco das carteiras ótimas Bayesianas com o CVaR



Fonte: Elaborado pelos autores

Nota-se que o CVaR\_H com a metodologia  $\hat{\Omega}$  tem um comportamento irregular devido ao fato de que a manipulação realizada pelas visões do investidor altera a estrutura de risco-retorno entre os ativos, e a medida  $\hat{\Omega}$  captura adequadamente o risco da carteira, entretanto, o CVaR calculado com a metodologia de Estimação Bayesiana, considerando uma distribuição Gaussiana dos retornos da carteira, parece menos sensível às mudanças das visões do mercado.

## 5. Conclusões

A principal contribuição desta pesquisa foi adaptar a metodologia clássica de alocação de ativos para analisar carteiras com retornos não Gaussianos provocados, tanto por mudanças de regime quanto por quebras estruturais.

As mudanças de regime (ou estados) mudam os parâmetros da distribuição dos retornos, entre um número finito de estados, de forma recorrente ao longo do tempo. Estas mudanças de regime são causadas, por exemplo: por crises financeiras, recessões econômicas, hiperinflação, mudanças nas políticas fiscais, etc.

As quebras estruturais mudam os parâmetros de forma permanente, entre um número infinito de estados, não recorrentes ao longo do tempo. Estas quebras estruturais são causadas por eventos de longa duração, por exemplo: mudanças climáticas, descoberta de novas tecnologias, disputas geopolíticas, novas tendências sociais, etc.

Para lidar com o problema das mudanças de regime, propõe-se a substituição do mecanismo de otimização baseada no índice de Sharpe pela otimização baseado na medida  $\hat{\Omega}$ . Isto porque a medida  $\hat{\Omega}$  tem a vantagem de quantificar o risco-retorno de qualquer distribuição de probabilidade e não somente distribuições Gaussianas como acontece com o índice de Sharpe, ou seja, os retornos não Gaussianos provocados pelas mudanças de regime são tratados naturalmente pela medida  $\hat{\Omega}$ .

Para lidar com o problema das quebras estruturais, propõe-se a substituição do procedimento de estimação dos parâmetros da distribuição dos retornos, baseada em técnicas da estatística Frequentista por técnicas da estatística Bayesiana. Isto porque a estatística Bayesiana, tem a vantagem de combinar as informações públicas do mercado (dados históricos dos retornos) com informações privadas do investidor (visões prospectivas do mercado), permitindo corrigir a quebra estrutural, e na sequência, tratar o retorno não Gaussiano utilizando o mecanismo de otimização baseada na medida  $\hat{\Omega}$ .

Os experimentos realizados, tanto com dados sintéticos (gerados artificialmente), quanto com dados reais do mercado, comprovam e validam as adequações empregadas nesta pesquisa.

Como trabalho futuro sugere-se desenvolver critérios ou modelos para formular apropriadamente as visões do mercado, além disso, poderiam ser realizados testes do tipo Backtesting para avaliar as qualidades preditivas desses modelos.

## Referências

- BAUDER, D.; BODNAR, T.; PAROLYA, N.; SCHMID, W. Bayesian mean–variance analysis: optimal portfolio selection under parameter uncertainty. **Quantitative Finance**, v. 21, n. 2, p. 221–242, 2021.
- BLACK, F.; LITTERMAN, R. Global Portfolio Optimization. **Financial Analysts Journal**, v. 48, n. 5, p. 28–43, 1992.
- BODNAR, T.; MAZUR, S.; OKHRIN, Y. Bayesian estimation of the global minimum variance portfolio. **European Journal of Operational Research**, v. 256, n. 1, p. 292–307, 2017.
- CASTRO, J.; TITO, E.; BRANDÃO, L.; GOMES, L. Crypto-assets portfolio optimization under the Omega measure. **The Engineering Economist**, v. 65, n. 2, p. 114–134, 2020.
- CHU, C. S. J.; SANTONI, G. J.; LIU, T. Stock market volatility and regime shifts in returns. **Information Sciences**, v. 94, n. 1–4, p. 179–190, 1996.
- DOUCET, A.; DE FREITAS, N.; GORDON, N. **Sequential Monte Carlo Methods in Practice**. Springer New York, NY, 2001.
- FAMA, E. F. The Behavior of Stock-Market Prices. **The Journal of Business**, v. 38, n. 1, p. 34–105, 1965.
- GREYSERMAN, A.; JONES, D. H.; STRAWDERMAN, W. E. Portfolio selection using hierarchical Bayesian analysis and MCMC methods. **Journal of Banking and Finance**, v. 30, n. 2, p. 669–678, 2006.
- HÄRDLE, W. K.; SIMAR, L. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 5<sup>th</sup> Edition. Springer Nature Switzerland AG, 2019.
- HARVEY, C.; LIECHTY, J.; LIECHTY, M.; MÜLLER, P. Portfolio selection with higher moments. **Quantitative Finance**, v. 10, n. 5, p. 469–485, 2010.
- HUARSAYA, L.; BRANDÃO, L.; TITO, E.; CASTRO, J. **Um método universal para seleção de carteiras**. CADERNOS DO IME – Série Estatística. UERJ, v.52, p.1-23, Rio de Janeiro, 2022.
- IDZOREK, T. M. A step-by-step guide to the Black-Litterman model: Incorporating user-specified confidence levels. **Forecasting Expected Returns in the Financial Markets**, p. 17–38, 2007.
- JARQUE, C. M.; BERA, A. K. Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. **Economics Letters**, v. 6, n. 3, p. 255–259, 1980.
- JOBSON, J. D.; KORKIE, B. Putting Markowitz theory to work. **Journal of Portfolio Management**, v. 7, n. 4, p. 70–74, 1981.
- JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. Sample Mean, Covariance and Correlation as Matrix Operations. In: **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 6th. ed. New Jersey: Pearson, 2007. p. 1–773.

KAZEMI, H.; SCHNEEWEIS, T.; GUPTA, R. Omega as a Performance Measure. **Journal of Performance Measurement**, v. 8, p. 16-25, 2004.

KEATING, C.; SHADWICK, W. F. A Universal Performance Measure. **Journal of Performance Measurement**, v. 6, n. 3, p. 59–84, 2002.

LEWIN, M.; CAMPANI, C. H. Gestão de Carteiras sob Múltiplos Regimes: Estratégias que Performam Acima do Mercado. **Journal of Contemporary Administration**, v. 24, n. 4, p. 300–316, 2020.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.

MICHAUD, R. O. The Markowitz Optimization Enigma: Is “Optimized” Optimal? **Financial Analysts Journal**, v. 45, n. 1, p. 31–42, 1989.

OLIVEIRA, A. B. **Ensaio em alocação de portfólio com mudança de regime**. Tese (Doutorado em Economia de Empresas) - FGV - Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, 2014.

ROBERT, C. P.; CASELLA, G. **Monte Carlo Statistical Methods**. 2. ed. Springer, New York, NY, 2004.

SARANYA, K.; PRASANNA, P. K. Portfolio Selection and Optimization with Higher Moments: Evidence from the Indian Stock Market. **Asia-Pacific Financial Markets**, v. 21, n. 2, p. 133–149, 2014.

SHARPE, W. F. Mutual Fund Performance. **The Journal of Business**, v. 39, n. 1, p. 119–138, 1966.

SONG, Y. Modelling Regime Switching and Structural Breaks with an Infinite Hidden Markow. **Journal of Applied Econometrics**, v. 29, n. 5, p. 825–842, 2014.

ZHAO, D.; FANG, Y.; ZHANG, C.; WANG, Z. Portfolio Selection Based on Bayesian Theory. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 1, n. 11, p. 1–11, 2019.

## PORTFOLIO OPTIMIZATION WITH NON-GAUSSIAN RETURNS: A BAYESIAN APPROACH

### Abstract

*The modern portfolio theory establishes that the optimal allocation of assets is a function of the mean-variance of the return distribution. It is generally assumed that these returns follow a Gaussian distribution, estimated from historical data using frequentist statistical methods. However, the current dynamics of globalized markets can lead to regime changes or structural breaks in the time series of returns, rendering them non-Gaussian. To address the issue of regime changes, it is proposed to replace the optimization mechanism based on the Sharpe ratio with Omega-based optimization. This is because the Omega measure has the advantage of quantifying the risk-return of any probability distribution, not limiting itself to mean-variance as is the case with the Sharpe ratio, thereby resolving the issue of regime changes. To handle the problem of structural breaks, it is suggested to replace the parameter estimation procedure of the return distribution, which is based on frequentist statistical techniques, with Bayesian statistical techniques. Bayesian statistics have the advantage of combining public market information (historical return data) with private investor information (prospective market views), allowing for the correction of structural breaks.*

**Key-words:** *Modern Portfolio Theory; Omega Measure; Bayesian Statistics.*