CADERNOS DO IME – Série Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ
ISSN impresso 1413-9022 / ISSN on-line 2317-4536 - v. 46, p.1 - 15, 2019
DOI: 10.12957/cadest.2019.46087

ANÁLISIS *A PRIORI* DE UN INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN SOBRE DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS ENTEROS CON ANÁLISIS ESTADÍSTICO IMPLICATIVO

Ricardo Fabián Espinoza
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE – Argentina
rrfespinoza@gmail.com

Liliana Noemí Caputo
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE – Argentina
proflcaputo@gmail.com

Paula Daniela Bordón
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE – Argentina
Paulabordon85@gmail.com

María Rocío Ayala
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE – Argentina
rocioayalazara@gmail.com

Eduardo Adolfo Porcel
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE – Argentina
porcelfel@arnet.com.ar

Resumen

Se presenta el análisis a priori de un cuestionario sobre divisibilidad de números enteros, mediante Análisis Estadístico Implicativo. Para realizarlo se construyó una matriz booleana en cuyas filas se consignaron los saberes requeridos para resolver los ítems en evaluación; éstos constituyen las columnas de la matriz Luego se realizó un análisis de similaridad de las variables determinándose cuatro clases de cuasi-equivalencia. Finalmente se construyó el grafo implicativo correspondiente a cada una de ellas a fin de establecer que relaciones de tipo causa-efecto existen entre las variables. Este estudio servirá de referencia para analizar, con la misma metodología, las respuestas de los alumnos que sean evaluados con este instrumento.

Palabras clave: *Análisis Estadístico Implicativo - Análisis a priori – Divisibilidad - Matriz MAP - Árbol de similaridad - Cuasi-implicaciones.*

Recebido em 22/10/2019; Aceito em 03/03/2020

1. Introducción

En los últimos años del siglo XX, en el marco de la escuela francesa de didáctica de la matemática, Régis Gras y sus colaboradores de la Universidad de Nantes crearon un método de Estadística Multivariada al que denominaron ASI (sigla de su nombre en francés *Analyse Statistique Implicative*). Este método surgió originalmente para establecer relaciones entre las respuestas de un cuestionario de evaluación. A diferencia de otros métodos de asociación de variables, ASI establece relaciones de causa-efecto a las cuales sus creadores denominaron reglas o cuasi-implicaciones. Existen numerosos trabajos de investigación en que, utilizando esta metodología, se exploran las relaciones que los alumnos establecen entre los saberes (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) subyacentes en los distintos ítems de evaluación. Entre otros pueden mencionarse el trabajo realizado por Gagatsis (2002) - que concluye que los alumnos que conocen y comprenden la definición formal de valor absoluto, resuelven correctamente aquellos problemas que pueden resolverse con nociones más intuitivas de dicha función – el de Caputo, Jorge, Espinoza, Porcel y Romero (2016) quienes utilizando esta metodología detectaron las relaciones conceptuales que establecen ingresantes universitarios al identificar y representar números reales; el de Delgado, De María y Ulecia (2009) que analizan los saberes de estudiantes de Nivel Medio respecto a funciones polinómicas de primero, segundo grado y constantes o el de Mayén y Díaz (2014) que utilizaron ASI para explorar la comprensión de alumnos de escuelas secundarias respecto a las medidas de tendencia central.

Sin embargo, los creadores del método consideraron que el mismo es adecuado, también, para realizar el *análisis a priori* de un instrumento a fin de obtener una “medida de comparabilidad entre el análisis a priori y la contingencia” (SPAGNOLO, GRAS, RÉGNIER, 2009), es decir, establecer un marco de referencia entre las respuestas dadas por los sujetos evaluados y las esperadas por los autores del cuestionario. Por su parte, Gregori, Orús y Pitarch (2009) afirman que el análisis a priori, al realizarse con ASI, permite validar el instrumento de recolección de información.

En este artículo, se presenta el análisis a priori del instrumento utilizado por el Dr. Fabián Espinoza (2019) en la investigación de su Tesis Doctoral, a fin de indagar sobre los conocimientos referidos a divisibilidad de los números enteros de estudiantes de Profesorado en Matemática. Si bien el instrumento fue validado utilizando herramientas propias del marco teórico utilizado y por pares expertos, se cree pertinente realizar una nueva validación del mismo antes de volver a suministrarlo a ingresantes de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste. Como las respuestas de dichos estudiantes serán analizadas con ASI (análisis al que de aquí en adelante denominaremos *a posteriori*), es apropiado pensar que los resultados que se obtengan a partir del análisis *a priori* realizado con la misma metodología le dará un marco de referencia al primero, enriqueciéndolo.

2. Metodología

Como ya se mencionara el Análisis Estadístico Implicativo establece relaciones del tipo “si a, entonces, casi siempre b” entre los ítems de un cuestionario de evaluación (variables en estudio). Estas relaciones no son implicaciones lógicas formales puesto que, aun cuando exista relación entre los ítems a y b del cuestionario, no todo alumno que responda correctamente el ítem a, responderá correctamente el ítem b.

Por tal motivo, los autores han llamado a estas relaciones reglas o cuasi-implicaciones (GRAS Y KUNTZ, 2009). El sentido de las mismas está dado por el supuesto: “si un ejercicio es más complejo que otro, entonces todo alumno que resuelve el primero debería resolver también el segundo”. (RÉGNIER, J. C., 2013). La validez o no de la regla estará dada por el tamaño del número de contraejemplos de la implicación en el conjunto de sujetos evaluados.

Para determinar si existe o no este tipo de relaciones entre dos variables, se requiere de dos conjuntos finitos: un conjunto de n elementos que llamaremos S (que en el caso del análisis *a posteriori* son los sujetos evaluados mientras que en el del análisis *a priori* son los saberes involucrados en los ítems del cuestionario) y otro conjunto V formado por las variables dicotómicas en estudio (los ítems del cuestionario). Siendo a, b $\in$ V, se consideran los conjuntos: $A = \{x \in S \,/\, a(x) = 1\}$ y $B = \{x \in S \,/\, b(x) = 1\}$ es decir, los conjuntos de los saberes utilizados para resolver los ítems a y b, respectivamente. Ahora bien, formalmente si $a \Rightarrow b$ es verdadera, siendo a verdadera, también lo es b es decir, que $A \subset B$; en la práctica, puede existir $x \in S$ tal que $a(x) = 1$ y $b(x) = 0$, sin que ello signifique que no existe relación entre ambas variables. Entonces, resulta $A - B \neq \emptyset$. Sean ahora X e Y dos subconjuntos de S, coordinables con A y B, respectivamente, de los cuales se desconoce si existen vínculos entre ellos. Gras y Kuntz

(2009) afirman que la regla a $\Rightarrow$ b es admisible al nivel de confianza 1 - α si, y sólo si, se cumple que Pr[Card(X – Y) $\leq$ Card (A – B)] $\leq$ α (1). Esta probabilidad, según sea la población y el tamaño de muestra, puede calcularse utilizando la distribución hipergeométrica, la binomial o la ley de Poisson, pero Wackerly, Mendelhall y Scheaffer (2010) afirman que puede modelarse por la ley de Poisson puesto que la distribución Hipergeométrica H(N, r, n) (siendo N el tamaño de la población, r el número de casos favorables al suceso de interés y n el tamaño de la muestra) converge a la Binomial B(n, p) cuando N $\rightarrow\infty$ con p = r/N. A su vez, la B(n, p) converge a la distribución de Poisson P (λ) cuando n es grande, p pequeña y λ= np es menor que 7 por lo que, en definitiva, ambas leyes tienden a la distribución de Poisson de parámetro $\lambda = \frac{\mathrm{Car(A).Car(S-B)}}{\mathrm{Car(S)}}$ (2). (LERMAN, GRAS, ROSTAM, 1981)

Bajo este supuesto, se define un estimador de la diferencia entre Car(A – B) y el valor que habría tomado si a y b fueran independientes, a la cual se denota con Q(a, ¬b), de la manera siguiente: $\mathrm{q}(\mathrm{a}, \neg \mathrm{b}) = \frac{\mathrm{Car(A-B)} - \frac{\mathrm{Car(A).Car(S-B)}}{\mathrm{Car(S)}}}{\sqrt{\frac{\mathrm{Car(A).Car(S-B)}}{\mathrm{Car(S)}}}}$ (3). Este estimador se denomina el índice de la implicación. Bajo determinadas condiciones Q(a, ¬b) se aproxima a la distribución Normal (0,1), por lo que se define la intensidad de implicación (medida de la calidad inductiva de a sobre b) como sigue:

$$\varphi(\mathrm{a},\mathrm{b}) = \begin{cases} 1 - \Pr[\mathrm{Q}(\mathrm{a},\neg\mathrm{b}) \leq \mathrm{q}(\mathrm{a},\neg\mathrm{b})] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathrm{q}(\mathrm{a},\neg\mathrm{b})}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{t}^2}{2}}\mathrm{dt} & \text{si Card(B)} \neq \text{Card(S)} \\ 0 & \text{si Card(B)} = \text{Card(S)} \end{cases}$$

(4)

La intensidad mencionada permite redefinir la admisibilidad de la implicación, considerando que si φ(a,b) $\geq$ 1 - α, la regla a $\Rightarrow$ b es admisible a dicho nivel de confianza.

Generalmente, cuando el cardinal de S es muy grande, puede pasar que los cardinales de A y B sean muy pequeños respecto a él y, en consecuencia, muy grande el cardinal de sus complementos. En estos casos es usual introducir la entropía de Shannon y definir un índice que integre la información de un número pequeño de contraejemplos de la implicación y de su contrarrecíproca. Si bien, en este trabajo el cardinal de S no es demasiado grande, como el test será administrado a una muestra de más de 100 estudiantes, parece adecuado utilizar el concepto de entropía a fin de que los resultados obtenidos en este análisis sean comparables con los que se obtendrán al analizar con ASI las respuestas de los alumnos.

Luego, si $\alpha = \frac{\mathrm{Car(A)}}{\mathrm{Car(S)}}$ y $t = \frac{\mathrm{Car(A-B)}}{\mathrm{Car(S)}}$ (5), definimos la entropía de b habiéndose dado a, como sigue:

$$h_1(t) = \begin{cases} -(1-t\alpha^{-1})\log_2(1-t\alpha^{-1}) - t\alpha^{-1}\log_2 t\alpha^{-1} & \text{si } t \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 & \text{si } t \in \left[\frac{\alpha}{2}, \alpha\right] \end{cases} \quad (6)$$

y, si $\beta = \frac{\mathrm{Car(S-B)}}{\mathrm{Car(S)}}$ y $t = \frac{\mathrm{Car(A-B)}}{\mathrm{Car(S)}}$ (7) la entropía de ¬a, no habiéndose dado b, está dada por:

$$h_2(t) = \begin{cases} -(1-t\beta^{-1})\log_2(1-t\beta^{-1}) - t\beta^{-1}\log_2 t\beta^{-1} & \text{si } t \in \left[0, \frac{\beta}{2}\right) \\ 1 & \text{si } t \in \left[\frac{\beta}{2}, \beta\right] \end{cases} \quad (8)$$

Entonces, el índice mencionado es $i(a,b) = \sqrt[4]{\left(1-h_1^2(t)\right)\left(1-h_2^2(t)\right)}$ (9). A partir de él puede definirse la intensidad entrópica de la cuasi-implicación $a \Rightarrow b$ como sigue: $\psi(a,b) = \sqrt{i(a,b).\varphi(a,b)}$ (10) (GRAS Y KUNTZ, 2009). Ahora bien, para calcular la intensidad de las posibles reglas entre todos los pares de variables de V se utiliza el software CHIC; éste las calcula y presenta en una tabla de doble entrada. Sin embargo, cuando el número de variables es muy elevado, a fin de facilitar la interpretación de los resultados, el software construye un dígrafo simple ponderado, en el cual el peso de los arcos está dado por la intensidad de la implicación de las variables de los vértices y que se denomina grafo implicativo (COUTURIER, 2009). En este trabajo el grafo implicativo incluye sólo aquellas reglas de intensidades mayores o iguales a 0.9.

ASI permite también realizar una clasificación de las variables en estudio, es decir, agrupa aquellas variables que reúnen características similares. En la mayoría de los métodos *clusters* tradicionales, la similaridad o diferencia de dos variables se mide en términos de distancia entre ellas. En cambio, para clasificar las variables ASI calcula las similaridades en términos probabilísticos.

En este caso, el índice de similaridad de las variables a y b se define mediante:

s(a, b) = (Pr[Card(X ∩ Y) ≤ K] (11), siendo K = Card(A ∩ B), cardinal que representa el valor observado del número de copresencias entre a y b.

El software *Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive* (CHIC), utilizado para obtener los resultados, realiza la aproximación de las leyes de Poisson y Binomial a la Normal, de donde el índice de similaridad utilizado resulta:

$$s(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k_c} e^{\frac{x^2}{2}} dx, (12) \text{con } k_c = \frac{K - \frac{Card(A).Card(B)}{Card(S)}}{\sqrt{\frac{Card(A).Card(B)}{Card(S)}}} (13)$$

(ZAMORA, GRÉGORI Y ORÚS, 2009).

En el estudio de similaridades de variables, independientemente del cardinal de S, es preferible utilizar la teoría entrópica para asegurar el hecho de que "…el algoritmo de construcción de clases conduzca a varias clases distintas al final del proceso." (COUTURIER, 2009).

Al realizar el análisis de similaridad CHIC organiza las clases de variables mediante un dendograma que señala en rojo los segmentos que unen variables entre sí, grupos de variables entre sí, o un grupo y una variable que no pertenece a él. Se llaman "nodos significativos" y se interpretan como las variables o grupos que tienen un alto índice de similaridad en ese nivel. Si en el nivel k se tiene un nodo significativo, el correspondiente índice de similaridad es mayor al de cualquier nodo significativo del nivel h > k (los niveles se ordenan en forma creciente de arriba hacia abajo).

Para realizar el análisis a priori del instrumento (Anexo 1), se han seguido las pautas propuestas por Grégori, Orús y Pitarch (2009) en su obra "Reflexiones sobre el análisis *a priori* de los cuestionarios basados en técnicas del Análisis Estadístico Implicativo". Dichos pasos son:

1) Construir una matriz *a priori (*MAP) consignando en sus filas los contenidos (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) que permiten resolver cada ítem y dichos items en las columnas. De esta manera, el elemento ij de la matriz será 1 si para resolver el ítem j se requiere el saber i o 0 en caso contrario.

2) Aplicar ASI para obtener clases de cuasi-equivalencia formadas por las variables que involucren saberes similares y establecer si existe coherencia en la estructura de cada clase obtenida.

3) Si en el paso anterior existe la mencionada coherencia, aplicar ASI para determinar las cuasi-implicaciones que deberían verificarse dentro de cada clase.

3. Análisis a priori del cuestionario

3.1. Construcción de la matriz a priori

En base al análisis a priori del instrumento incluido en la Tesis Doctoral del Dr. Fabian Espinoza (Tabla 1) se listan a continuación los conocimientos o procedimientos requeridos para la resolución de los ítems del cuestionario, que constituirán las categorías incluidas en las filas de la matriz a priori y los ítems en que se presentan (Tabla 2).

Tabla 1. Instrumento de evaluación

<table>
<tr><th>Item</th><th colspan="6">Consignas</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td colspan="3">a) ¿3 es divisor de 30?</td><td colspan="3">b) ¿3 es divisor de 473?</td></tr>
<tr><td colspan="3">c) ¿3 es factor de 30?</td><td colspan="3">d) ¿441 es múltiplo de 7?</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="6">Si se divide el número a por el número b, ¿existe alguna condición para que b sea divisor de a?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td colspan="6">Todos los múltiplos de un número, comprendidos entre 370 y 460, son: 380, 399, 418, 437y 456.</td></tr>
<tr><td colspan="3">a) ¿De qué número se trata?</td><td colspan="3">b) ¿Es único?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td colspan="6">15a45 es un número de 5 cifras.</td></tr>
<tr><td colspan="3">a) ¿existe algún valor de a para que este número sea divisible por 3?</td><td colspan="3">b) Si tu respuesta es afirmativa, indica todos los valores posibles de a.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td colspan="6">Si 187 =11·17, ¿son correctas las afirmaciones siguientes?:</td></tr>
<tr><td colspan="2">a) 17 es divisor de 11·17.</td><td colspan="2">b) 11·17 + 1870 es múltiplo de 187.</td><td colspan="2">c) 11·17 + 16 es múltiplo de 187.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">6</td><td colspan="6">En una estación un colectivos para con una frecuencia de 18 minutos y el otro lo hace cada 15 minutos…</td></tr>
<tr><td colspan="6">a) ¿Habrá un encuentro posterior después de una coincidencia?</td></tr>
<tr><td colspan="6">b) ¿Dentro de cuántos minutos, como mínimo, se encontrarán en esa estación, después de haber coincidido en ella los dos colectivos?</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="6">Se tienen 2 cuerdas que miden 240 cm y 308 cm y se las quiere cortar en trozos que tengan la misma longitud, ¿cuál será la mayor longitud en que se las puede cortar, de forma tal que la longitud de corte sea la misma en ambas cuerdas y que no sobre cuerda?</td></tr>
</table>

8	Se sabe que, si a y b son números naturales y a es divisor de b, siempre a ≤ b. ¿Sucede lo mismo si los números fueran enteros? Identifica todas las posibilidades para este caso.	
9	¿Es posible que dos números enteros distintos tengan los mismos divisores? Si tu respuesta es afirmativa, indica en qué condiciones eso ocurre.	
10	Si fuera posible, escribe un número que tenga:	
	a) Exactamente 4 divisores naturales.	b) Más de 15 divisores enteros.

Fuente: Elaboración propia.

Cabe destacar que se excluyeron algunos saberes (tales como el algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor), puesto que no son parte de la currícula de Matemática de la Escuela Secundaria.

Tabla 2. Conocimientos involucrados en cada ítem del instrumento.

Fila	Conocimientos involucrados o emergentes	Items
1	Sumas sucesivas para determinar si un número es divisor de otro o éste es múltiplo del primero.	1; 5; 6
2	Restas sucesivas para determinar si un número es divisor de otro o éste es múltiplo del primero.	1; 5; 6
3	Definiciones de múltiplo de un número entero.	1 a 6
4	Definición de divisor de un número entero.	1 a 10
5	Definición de factor de un número entero.	1c; 3, 6; 9
6	Definición de divisibilidad de un número por otro.	1c; 4
7	División de un número por otro para hallar el cociente y el resto.	1; 2; 3a; 5a,b
8	Si al dividir a por b ≠ 0, el resto es cero, a es múltiplo de b.	1; 4b; 5a,b
9	Si al dividir a por b ≠ 0, el resto es cero, b es divisor de a.	1; 2; 3a;5a,b; 7
10	Si al dividir a por b ≠ 0, el resto es cero, b es factor de a.	1c; 3; 6; 7; 9
11	Uso de distintos criterios de divisibilidad.	1; 3; 4; 5; 7
12	Si al dividir a por b, el resto es 0, b es divisor de a y a es múltiplo de b.	2
13	a es múltiplo de b si, y sólo si, b es divisor de a.	3
14	Uso de la resta de 2 múltiplos consecutivos de un mismo número.	3
15	Uso de tanteo para hallar la solución del problema.	2; 3; 4; 8; 10
16	Planteo de una o más ecuaciones para obtener la solución del problema.	4a
17	Si $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \neq 0$, entonces, $a \mid a$.	3a; 10
18	Si $a \in \mathbb{Z}$, entonces, $1 \mid a$.	3a; 8; 10
19	Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a \mid b \wedge a \mid c$, $a \mid b + c$.	4
20	Si $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a \mid b$, entonces, $-a \mid b$.	3b; 9; 10b

21	Si a, b $\in \mathbb{Z}$ y a | b, entonces, a | b.c, $\forall$c $\in \mathbb{Z}$.	3b; 8; 10a
22	Uso del desarrollo decimal de un número natural, como combinación lineal de potencias de 10.	4a
23	Definición de elementos primos en general y en $\mathbb{Z}$, en particular.	3; 10
24	Factorización de un número entero no invertible en factores primos.	1; 3; 5a,b; 10a
25	Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma para expresar a un número entero como el producto de uno por la suma de otros.	5b
26	Algoritmo de división para expresar al dividendo como la suma del resto y del producto entre el cociente y el divisor.	5c
27	Búsqueda de múltiplos comunes de dos números dados.	6
28	Cálculo del mínimo común múltiplo de dos números, usando la descomposición factorial en primos, de cada uno de ellos.	6
29	Búsqueda de divisores comunes de dos o más números dados.	3; 7
30	Cálculo del máximo común divisor de dos números o más números, como el máximo del conjunto de divisores comunes.	3a; 7
31	Cálculo del máximo común divisor de dos o más números, usando descomposición factorial en primos, de cada uno de ellos.	3a; 7
32	Disyunción de casos, distinguiendo distintos valores de los números utilizados para formular conclusiones.	9
33	Interpretación de resultados en el contexto del problema dado.	6; 7

Fuente: Elaboración propia.

De lo observado en las Tablas 1 y 2, la matriz MAP resultó de clase 33x19.

3.2. Clasificación de las variables

Para clasificar las variables se realizó un análisis de similaridad sobre la matriz MAP. Dicho análisis proporcionó cuatro clases de cuasi-equivalencia (Figura 1):

C_1 = {1a, 1b, 1d, 5a, 5b, 1c, 5c}

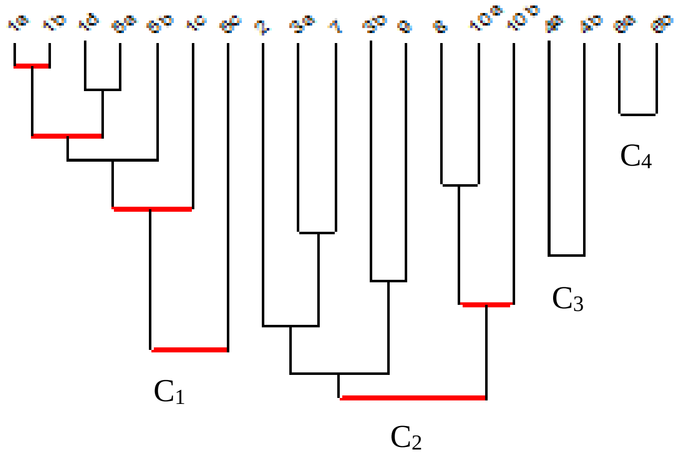
C_2 = {2, 3a, 7, 3b, 9, 8, 10a, 10b}

C_3 = {4a, 4b}

C_4 = {6a, 6b}

Puede observarse que la clase C_1 está constituida por todos aquellos ítems de evaluación que para responderlos y justificar las respuestas debidamente, es suficiente comprender las definiciones de divisor, múltiplo y factor, la diferencia entre cada uno de dichos objetos y el criterio de divisibilidad por 3. Cabe señalar, que en estos ítems es suficiente conocer y usar los saberes mencionados restringidos a ℕ. Se observa que en este grupo existen 4 nodos significativos en los niveles 1, 4, 7 y 13.

Figura 1: Arbol de similaridad



Fuente: Elaboración propia.

La clase C_2 está constituida por aquellos ítems que requieren conocimientos que ya no pueden limitarse sólo al conjunto de números enteros positivos. Evidentemente, el problema 2 exige saber que el resto de la división en ℤ debe ser nulo para que el dividendo sea múltiplo del divisor. Por su parte, los ítems 3, 8 y 9, requieren conocer propiedades de divisibilidad de un número y su opuesto. En particular, los problemas 3b y 8 involucran conocer que todo par de enteros no simultáneamente nulos admite en ℤ dos divisores comunes máximos y que, según la naturaleza del problema, los dos o sólo uno de ellos corresponde a la solución del problema planteado. Finalmente, mucho de lo dicho hasta aquí demuestra la necesidad del uso del Teorema de Factorización Única (y no sólo de su restricción al conjunto de números naturales mayores que uno es decir, el denominado Teorema Fundamental de la Aritmética). En el caso de los ítems del problema 10, si bien podría encontrarse la solución a ambos sin salir del conjunto de números naturales, la solución más económica para el ítem b sí involucra a los divisores negativos de un número entero y es de ahí su similaridad con las variables antes mencionadas. En esta clase, sólo existen dos nodos significativos: uno en el nivel 11 y el otro en el 15. Por tal motivo, los índices correspondientes son menores a 0.8.

En la Figura 1, podemos observar una tercera clase, C_3 = {4a, 4b}, cuyos elementos tienen un índice de similaridad de 0.89766. Nótese que las variables de C_3 son las correspondientes al problema 4, el único del test que, para su solución, requiere el planteo de una o dos ecuaciones es decir, de conceptos y procedimientos algebraicos y no meramente aritméticos, como los ítems restantes.

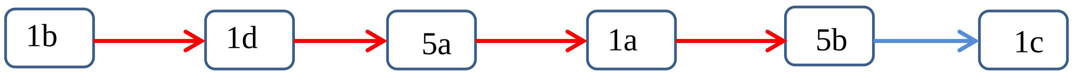
La clase C_4 = {6a, 6b} está formada por sólo dos variables (entre las cuales el índice de similaridad es de 0.99999). Estas variables corresponden al único problema del test que requiere hallar múltiplos (y no divisores) comunes y el cálculo del mínimo común múltiplo de dos números naturales. Nótese que para la obtención de dicho múltiplo común, es suficiente utilizar el Teorema Fundamental de la Aritmética a diferencia de los problemas incluidos en la segunda de las clases halladas.

Los criterios anteriormente explicitados justifican la configuración de las clases de cuasi-equivalencias obtenidas y muestran la coherencia de la clasificación realizada.

3.3. Cuasi-implicaciones obtenidas en cada clase

Al calcular la intensidad de las reglas de las variables de la primera clase (formada por los subítems de los problemas 1 y 5, los cuales eran factibles de resolver sólo conociendo las definiciones de divisor, múltiplo y factor o los criterios de divisibilidad por 3 y por 7) se obtiene la siguiente cadena de cuasi-implicaciones:

Figura 2. Grafo implicativo de la clase C_1



Fuente: Elaboración propia.

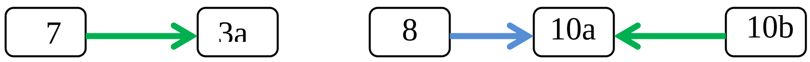
Las 4 primeras implicaciones de la Figura 2 tienen intensidad 0.99 y la última 0.95. Puede observarse que el poder determinar que un número no es divisible por otro (1b pide justificar que 3 no es divisor de 473) permite identificar cuándo un número es múltiplo (en 1d se pregunta si 441 es múltiplo de 7) o divisor de otro, aun cuando el número a determinar esté expresado mediante un producto (en 5a 187 se expresa como el producto entre 11 y 17, mientras que en 1a se pregunta si 3 es divisor de 30), como la suma de dos múltiplos (en 5b se debe justificar que $11{\cdot}17 + 1870$ es múltiplo de 187) y que si un número es divisor de otro es un factor de éste (1a $\Rightarrow$ 1c, siendo 1c la proposición "3 es factor de 30").

En la Figura 3 se presenta el grafo implicativo correspondiente a las variables de la clase C_2, la cual está constituida por los ítems de evaluación que para ser resueltos requieren extender el concepto de divisibilidad a todo el conjunto de números enteros.

Observamos que existen dos cuasi-implicaciones de intensidad 0.90 (en verde) y una de 0.95 (en azul).

Si bien tanto en el problema 7 como en el ítem 3a la solución se obtiene calculando un máximo común divisor de dos y de cinco números naturales, respectivamente, el problema 7 (al estar en un contexto extramatemático) requiere no sólo conocer el procedimiento de cálculo de los divisores comunes máximos, sino también interpretar la situación, comprender el significado de dichos divisores y seleccionar cuál es el adecuado para dar solución al problema. Esto explica el sentido de la primera regla, representada a la izquierda de la Figura 3. Vemos que para hallar un número que admita más de 15 divisores enteros (10b) y explicitar lo realizado es necesario utilizar la propiedad de que si a es un divisor de b, -a también lo es, propiedad que no resulta necesaria para hallar un número natural que admita exactamente 4 divisores naturales (10a), lo cual explica el sentido de la regla 10b $\Rightarrow$ 10a. De la misma manera, el sentido de la cuasi implicación 8 $\Rightarrow$ 10a, está fundado en que para responder el ítem 8 (que hace referencia al orden entre un divisor de un número y éste), es necesario hacer un riguroso proceso de disyunción de casos según los signos de dividendo y divisor.

Figura 3: Grafo implicativo de las variables de la clase C_2



Fuente: Elaboración propia.

Se determinaron dos clases más, formadas cada una por dos variables: los dos ítems del problema 4 y los dos del problema 6 (Figuras 4 y 5).

Figura 4. Grafo implicativo de la clase C_3

Fuente: Elaboración propia.

Se obtuvo que $\psi(4b, 4a) = 0.85$ de donde es evidente que el haber determinado que todos los valores posibles de la incógnita son 0, 3, 6 o 9, es suficiente para determinar que la cifra buscada debe ser un múltiplo de 3 (el ítem a del problema consiste en mostrar que existe un valor de a tal que el número de 5 cifras 15a45 sea múltiplo de 3 y el b, en presentar todas las posibles soluciones). De la misma manera, $\psi(6a, 6b) = 0.99$. El problema 6 está dado en un contexto extramatemático, por lo cual reconocer que los dos micros se volverán a encontrar en un tiempo que sea un múltiplo común del número de minutos que tarda cada uno de ellos en ir y volver a la estación, requiere habilidades de comprensión del concepto de múltiplo común más complejas que el de comprender que el primero de dichos encuentros se producirá en el mínimo de dichos tiempos y que, por lo tanto, debe hallarse el mínimo común múltiplo de los tiempos requeridos por ambos colectivos para responder el ítem b.

Figura 5. Grafo implicativo de la clase C_4

Fuente: Elaboración propia

4. Conclusiones

En la matriz MAP se han incluido aquellas definiciones, propiedades o procedimientos que se espera utilicen los estudiantes para responder al cuestionario.

Las clases de cuasi-equivalencia obtenidas permiten verificar la coherencia de los saberes elegidos para caracterizar *a priori* los ítems del cuestionario, puesto que se han encontrado criterios que explican la similaridad entre las variables que forman cada clase.

Se puede concluir que el instrumento establece un entramado de relaciones entre las definiciones, propiedades de divisor y múltiplo y procedimientos que permiten resolver problemas que los involucran. Dichas relaciones se enriquecen en los casos en que se requieren saberes más complejos como la definición de número primo o el teorema de factorización única, utilizados en problemas dados en contextos extramatemáticos. Estas relaciones serán un importante marco de referencia al analizar con ASI las respuestas de los estudiantes al cuestionario.

Referencias

CAPUTO, L.; JORGE, M.; ESPINOZA, R.; PORCEL, E.; ROMERO, J. (2016). Análisis Estadístico Implicativo de los conocimientos previos sobre números reales de ingresantes a la universidad. **Cadernos do IME – Série Estatística**. Volumen 42, p 30 – 44. Río de Janeiro, Brasil: Universidade do Estado do Rio de Janeiro. ISSN impreso 1413 – 9022. ISSN on line 2317 – 4535.

COUTURIER, R. (2009). CHIC: utilización y funcionalidades. En Orús, P.; Zamora, L. y Gregori, P. (Eds), **Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana**. Santiago de Cuba, Cuba: Universitat Jaume I de Castellón y Universidad de Oriente. pp 51 – 63.

DELGADO, M.; DE MARÍA, J.; ULECIA, T. (2009). Aplicación del CHIC al estudio de las funciones elementales. En Orús, P.; Zamora, L. y Gregori, P. (Eds), **Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana**. Santiago de Cuba, Cuba: Universitat Jaume I de Castellón y Universidad de Oriente. pp 235 – 263.

ESPINOZA, R. (2019). La comprensión alcanzada por estudiantes de Profesorado en Matemática, referida a la Divisibilidad, al comenzar la Universidad. **Tesis Doctoral**. Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales, Universidad Nacional de Misiones. Posadas, Argentina.

GAGATSIS, A. (2002). A multidimensional analysis of obstacles to student's understanding in Mathematics. **Memorias del V Simposio de Educación Matemática.** EMAT Editores. ISBN Nº 987 – 20239 – 1 – 3. Chivilcoy, Argentina.

GRAS, R. Y KUNTZ, P. (2009). El Análisis Estadístico Implicativo (ASI) en respuesta a problemas que le dieron origen. En Orús, P.; Zamora, L. y Gregori, P. (Eds), **Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana**. Santiago de Cuba, Cuba: Universitat Jaume I de Castellón y Universidad de Oriente. pp 3 – 50.

GRÉGORI, P.; ORÚS, P. Y PITARCH, I. (2009). Reflexiones sobre el análisis a priori de los cuestionarios basadas en técnicas del Análisis Estadístico Implicativo. En Orús, P.; Zamora, L. y Gregori, P. (Eds), **Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana**. Santiago de Cuba, Cuba: Universitat Jaume I de Castellón y Universidad de Oriente. pp 159 – 190.

LERMAN, I.C.; GRAS, R.; ROSTAM, H. (1981). Elaboration et évaluation d'un índice d'implication pour des données binaries, I et II, **Mathématiques et Sciences Humaines**, nº 74,5-35 et nº 75, 5-47.

MAYÉN, S.; DÍAZ, C. (2014). Análisis implicativo que refuerza la validez y fiabilidad de un cuestionario de medidas de tendencia central. Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica. La enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad y la Estadística. (pp 27 – 37). Bogotá: Asociación Colombiana de Educación Estocástica. Accedido: 25/09/2019. Recuperado en:
http://funes.uniandes.edu.co/6534/1/May%C3%A9n2014An%C3%A1lisisECEE.pdf

RÉGNIER J-C. (2013). Extracto de la obra **Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités** Gras, R.; Régnier J-C.; Guillet F. (Eds) (2009). Recuperado en: http://sites.univ-lyon2.fr/asi7/?page=0&lang=es . Accedido: 25/09/19.

SPAGNOLO, F.; GRAS, R.; RÉGNIER, J;C. (2009). Una medida comparativa en Didáctica de las matemáticas entre el análisis a priori y la contingencia. En Orús, P.; Zamora, L. y Gregori, P. (Eds), **Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana.** Santiago de Cuba, Cuba: Universitat Jaume I de Castellón y Universidad de Oriente. pp 143 – 157.

WACKERLY, D.; MENDENHALL, W. Y SCHEAFFER, R. (2010). **Estadística matemática con aplicaciones.** México: Cengage Learning Editores.

ZAMORA, L.; GRÉGORI, P. Y ORÚS, P. (2009). Conceptos fundamentales del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) y su soporte computacional CHIC. En Orús, P.; Zamora, L. y Gregori, P. (Eds), **Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana**. Santiago de Cuba, Cuba: Universitat Jaume I de Castellón y Universidad de Oriente. pp 65 – 101.

PRIOR ANALYSIS OF AN EVALUATION INSTRUMENT ABOUT INTEGER DIVISIBILITY WITH IMPLICATIVE STATISTICAL ANALYSIS

Abstract

The a priori analysis of a questionnaire on divisibility of whole numbers is presented, by means of Implicative Statistical Analysis. To do this, a Boolean matrix was built in whose rows the knowledge required to solve the items under evaluation was recorded; these constitute the columns of the matrix. A similarity analysis of the variables was then performed, determining four kinds of quasi-equivalence. Finally, the implicative graph corresponding to each of them was constructed in order to establish that cause-effect relationships exist between the variables. This study will serve as a reference to analyze, with the same methodology, the responses of students who are evaluated with this instrument.

Key Words: *Implicative Statistical Analysis - Prior analysis – Divisibility – MAP Matrix – Similarity Tree- Quasi Implications.*