CADERNOS DO IME – Série Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ
ISSN impresso 1413-9022 / ISSN on-line 2317-4536 - v.44, p.37 - 47, 2018
DOI: 10.12957/cadest.2018.36483

ESCALONAMENTO MULTIDIMENSIONAL LOCAL: UMA ABORDAGEM VIA SUAVIZAÇÃO HIPERBÓLICA

Vinicius Layter Xavier
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ
viniciuslx@ime.uerj.br

Nelson Maculan
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação - COPPE
nelson.maculan@gmail.com

José Francisco Moreira Pessanha
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ
professorjfmp@hotmail.com

Marcello Montillo Provenza
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ
mprovenza@ime.uerj.br

Resumo

Este artigo apresenta uma nova abordagem para o método Escalonamento Multidimensional Local. Este método de redução de dimensionalidade é da classe de escalonamento multidimensional métrico e possui a característica de ser não diferenciável. Com o emprego da suavização hiperbólica é proposta uma formulação suavizada e um novo algoritmo. Resultados computacionais obtidos na resolução de problemas teste clássicos são apresentados e mostram a eficácia da proposta em comparação com os disponíveis na literatura.

Palavras-chave*: Local MDS; Redução de Dimemsionalidade; Estatística Multivariada; Programa R.*

1. Introdução

A análise de conjunto de dados em um espaço de alta dimensão é uma tarefa de grande relevância e de natureza complexa. Neste contexto, os métodos de redução de dimensionalidade possuem um importante papel, pois, de um modo geral, é mais fácil extrair informações contidas em dados quando o número de variáveis é pequeno. O principal objetivo dos métodos de redução de dimensionalidade é encontrar um conjunto menor de variáveis, calculado a partir das originais, buscando uma mínima perda de informação.

Escalonamento multidimensional (*MDS*) é uma classe de métodos de redução de dimensionalidade que considera o critério de preservação de distância ou dissimilaridade. Busca-se minimizar as distorções entre as distâncias ou as dissimilaridades medidas entre as observações no espaço original de alta dimensão e as distâncias medidas no espaço de baixa dimensão. O Escalonamento Multidimensional Local (*Local MDS*) (CHEN, BUJA, 2009), pertencente à classe de métodos MDS, tem assim uma função de escalonamento que visa a preservação de distância. O método Escalonamento Multidimensional Local tem, em particular, a ideia central de priorizar na projeção a preservação de distância entre as observações próximas e o afastamento das observações distantes. Um exemplo didático e ilustrativo do Escalonamento Multidimensional Local é apresentado em (FRIEDMAN, HASTIE, TIBSHIRANI, 2001).

Atualmente, existe uma grande diversidade de métodos de redução de dimensionalidade e uma vasta literatura. O problema de Escalonamento Multidimensional é abordado detalhadamente em (BORG, GROENEN, 2005), (BORG, GROENEN, MAIR, 2017) e (COX, COX, 2000). Um conjunto de métodos não lineares de preservação de distância é abordado em (LEE, VERLEYSEN, 2009). Xavier (2016) aborda em sua tese de doutorado um conjunto de métodos não lineares de redução de dimensionalidade da classe MDS. Os experimentos computacionais apresentados mostram um excelente desempenho do algoritmo proposto em comparação com outros algoritmos tradicionais (LEEUW, MAIR, 2009), (VENABLES, RIPLEY, 2013) e (WITTEN, TIBSHIRANI, 2011).

Na literatura, existe uma variedade de métricas para avaliação da qualidade das projeções realizadas por diferentes métodos de redução de dimensionalidade. Gracia e

Menasalvas (2014) apresentam uma revisão das métricas mais utilizadas e propõem uma metodologia para comparar a qualidade de projeções.

Este artigo tem por objetivo inovador apresentar a introdução da suavização hiperbólica (*Hyperbolic Smoothing*) no método Escalonamento Multidimensional Local, conforme o algoritmo HSMDS proposto em Xavier (2016). A introdução da Suavização Hiperbólica (SH) visa tornar o problema de otimização subjacente ao MDS em um problema continuamente diferenciável, uma característica que permite a aplicação de métodos de otimização sem restrições mais robustos e eficientes.

O artigo está organizado em cinco seções. A seguir, na seção 2, tem-se uma introdução ao método Escalonamento Multidimensional Local. Na sequência, a seção 3 descreve a introdução da Suavização Hiperbólica no método Local MDS. A aplicação da abordagem proposta é ilustrada por meio de dois estudos de casos, apresentados em Chen e Buja (2009), e que servem de *benchmark* para comparar diferentes abordagens para o escalonamento multidimensional. Por fim, na seção 5 são resumidas as principais conclusões.

2. Método Escalonamento Multidimensional Local

O método Escalonamento Multidimensional Local busca preservar a relação de vizinhança das observações no espaço reduzido tratando de forma diferente as observações vizinhas e as não vizinhas. Para os pares de observações vizinhas no espaço de alta dimensão, considera-se uma força local de preservação das distâncias no espaço de baixa dimensão. Já para os pares de observações não vizinhas no espaço de alta dimensão, considera-se uma força repulsiva com a finalidade de afastar as observações no espaço de baixa dimensão.

Para a formalização matemática do problema será utilizada a seguinte notação: considere uma matriz de distâncias euclidianas, $D_{n \times n}$, calculada a partir de um conjunto de *n* observações, $\boldsymbol{Z}_i; i = 1, \dots, n$, cada uma com *S* atributos, ou seja, cada observação pertence a um espaço de dimensão *S*. O processo de redução de dimensionalidade busca a representação de cada observação em um espaço de dimensão inferior *d*, onde $d < S$. Desta forma, o método Escalonamento Multidimensional Local consiste em obter um novo conjunto de observações, $\mathbf{x}_i; i = 1, \dots, n$, pertencentes ao espaço de menor dimensão *d*, ou seja, $\mathbf{x}_i \in \Re^d$, de modo que gere uma matriz de distâncias, que se aproxime de melhor forma à matriz de distâncias $D_{n\times n}$, tendo com base a seguinte função de escalonamento a ser minimizada:

$$f_{\text{Local MDS}}(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j)\in N}\left(D_{ij} - \left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|_2\right)^2 - t\sum_{(i,j)\notin N}\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|_2 \qquad (1)$$

Na expressão acima, o conjunto simétrico de pares vizinhos é representado por N. O primeiro termo da equação é chamado de tensão local (*local stress*) e o segundo de termo de repulsão. Considerando um valor fixo para o parâmetro t, a importância relativa da repulsão diminui na medida em que a cardinalidade do conjunto de vizinhos, $|N|$, aumenta. Por sua vez, $|N|$ dependente fundamentalmente do valor de um parâmetro k referente ao número de vizinhos mais próximos a ser considerado.

A relação de vizinhança é dada de forma simétrica, pelos k vizinhos mais próximos em um grafo. A simetria é construída de modo que as observações $\boldsymbol{Z}_i$ e $\boldsymbol{Z}_j$ são vizinhas se $\boldsymbol{Z}_j$ está entre os k vizinhos mais próximos de $\boldsymbol{Z}_i$ ou se $\boldsymbol{Z}_i$ está entre os k vizinhos mais próximos de $\boldsymbol{Z}_j$.

A intensidade da força repulsiva na expressão (1) é ajustada através do parâmetro t. O ajuste do parâmetro é fundamentado em duas propriedades desejadas:

- Invariância sob mudança na ordem de grandeza das distâncias, $D_{n\times n}$, por isso adota-se o uso da mediana das distâncias D_N dos pares de observações vizinhas.

- Invariância sob mudança no tamanho do grafo, pois o tamanho do grafo influencia no número de somas do termo local, $|N|$, e no termo de repulsão, $|N^c| = N(N-1)/2) - |N|$. Dessa forma, tem-se a utilização do fator $|N|/|N^c|$ na definição de t:

$$t = |N|/|N^c|\; mediana(D_N)\;\tau \qquad (2)$$

onde o parâmetro τ é um parâmetro auxiliar, não dependente do conjunto de dados de entrada e do valor de k vizinhos mais próximos. O parâmetro τ tem a função de facilitar o ajuste do parâmetro t.

Para mapeamentos realizados com diferentes valores de k e de t, uma medida da qualidade da redução de dimensionalidade tem que ser aplicada para se ter mapeamentos comparáveis.

3. Suavização Hiperbólica Aplicada no Método Local MDS

A técnica de Suavização Hiperbólica (SH) tem sido aplicada com sucesso num grande número de problemas difíceis da classe NP-difícil, incluindo problemas não diferenciáveis, não convexos e com um grande número de mínimos locais. Dentre essa classe de problemas resolvidos utilizando a SH pode-se citar por exemplo: Agrupamento (*Clustering*) (XAVIER, 2010, XAVIER, XAVIER, 2011), problema contínuo da p-mediana (*Multisource Fermat-Weber)* (XAVIER *et al.*, 2014b), Localização de Concentradores (*Hub Location*) (XAVIER *et al.*, 2015) e problemas da classe *Minimax* (BAGIROV, AL NUAIMAT, SULTANOVA, 2013). Um conjunto de aplicações da SH bem-sucedido pode ser encontrado em (XAVIER, XAVIER, 2014).

Dados dois pontos $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$, a distância euclidiana entre eles, $u = \left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|_2$, é não diferenciável quando $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$. A função original do método Escalonamento Multidimensional Local (1) possui por essa razão a característica de não diferenciabilidade. A suavização é efetuada pelo uso da função convexa $\theta(u,\gamma)$:

$$\theta(u,\gamma) = \sqrt{u^2 + \gamma^2} \qquad (3)$$

Tem-se como proposta aplicar a SH para substituir as distâncias euclidianas da função (1). Desta forma, o problema intrinsecamente não diferenciável é aproximado por um continuamente diferenciável, denominado Escalonamento Multidimensional Local Suavizado (EMLS).

$$\tilde{f}_{EMLS}(\mathbf{x},\gamma_1,\gamma_2) = \sum_{(i,j)\in N}\left(D_{ij} - \theta\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|_2,\gamma_1\right)\right)^2 - t\sum_{(i,j)\notin N}\theta\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|_2,\gamma_2\right) \quad (4)$$

A função objetivo original do problema (1) é não linear, pela presença de termos não-lineares, é não convexa, pela presença do sinal negativo antes do segundo somatório, e é não diferenciável, pela presença da distância euclidiana.

Para resolver a formulação suavizada (4), continuamente diferenciável, Xavier (2016) propôs o algoritmo HSMDS. O algoritmo busca resolver uma sequência de problemas diferenciáveis, onde os parâmetro de suavização (γ_1e γ_2) são gradualmente reduzido por um fator de redução. Esse princípio também é adotado em (XAVIER, 2003, XAVIER, OLIVEIRA, 2005, XAVIER, XAVIER, 2011). Assim, é gerada uma sequência de problemas suavizados que se aproximam gradativamente do problema original (1). Cada problema nessa sequência de aproximação é continuamente diferenciável, permitindo assim a aplicação de métodos eficientes e robustos de otimização sem restrições, tais como o Gradiente Conjugado e os métodos da família Quasi-Newton (LUENBERGER, YE, 2008). Informações complementares sobre a implementação, otimização, escolha dos parâmetros iniciais e fator de redução dos parâmetros estão disponíveis em (XAVIER, 2016).

4. Resultados Computacionais

No artigo de Chen e Buja (2009), o critério Continuidade Local (*local continuity* ou *LC meta-criterion*) (CHEN, BUJA, 2006) foi utilizado para comparar projeções do método Escalonamento Multidimensional Local (CHEN, BUJA, 2009) com outros métodos. Além disso esse critério foi utilizado para comparar projeções do método Escalonamento Multidimensional Local com diferentes valores dos parâmetros t e k. Assim para efeito de comparação direta com os resultados reportados em (CHEN, BUJA, 2009) faz-se necessário a aplicação desse critério nos experimentos computacionais.

O critério utiliza a relação de vizinhança nos espaços de alta dimensão e de baixa dimensão, tendo como ideia central a interseção dos K vizinhos mais próximos (K-NN) de uma observação no espaço de alta dimensão e os K-NN no espaço de baixa dimensão.

O critério Continuidade Local é fundamentado nas três definições a seguir:

- $N_k^s(i) = \{j_1, \dots, j_k\}$, conjunto dos k' vizinhos mais próximos da observação *i* com respeito às observações no espaço de alta dimensão;

- $N_k^d(i) = \{k_1, \dots, k_k\}$, conjunto dos k' vizinhos mais próximos da observação *i* com respeito às observações no espaço de baixa dimensão;

- $N_k(i) = \left|N_K^S(i) \cap N_K^d(i)\right|$, cardinalidade da interseção dos dois conjuntos anteriores.

A maior interseção entre os conjuntos $N_k^s(i) = \{j_1, \dots, j_k\}$, e $N_k^d(i) = \{k_1, \dots, k_k\}$, significa que a projeção no espaço de baixa dimensão tende a preservar as vizinhanças no espaço de alta dimensão. A cardinalidade de $N_k(i)$ é uma medida de sobreposição individual para uma observação genérica i. Desta forma, uma medida de sobreposição global é dada em (5):

$$N_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_k\,(i) \tag{5}$$

Quanto maior o valor da medida em (5), melhor a qualidade da projeção do espaço de alta dimensão no espaço de dimensão reduzida. Visando permitir comparações para diferentes valores de k', adota-se a padronização do valor N_k:

$$M_k = \frac{1}{k} N_k \qquad (6)$$

Logo, M_k assume valores no intervalo [0,1].

Com o objetivo de obter uma configuração inicial estável no método Escalonamento Multidimensional Local, Chen e Buja (2009) argumentam que uma boa estratégia para calibração consiste na inicialização do parâmetro τ, da expressão (1), com um valor grande, como $\tau = 1$, e sucessivamente reduzir o parâmetro até um valor baixo, como 0,01, sempre usando a última configuração das observações no espaço reduzido na inicialização seguinte. O ajuste do parâmetro τ foi realizado através de uma busca em grade. Ao longo de todas as configurações obtidas, escolhe-se a melhor configuração de acordo com uma métrica de avaliação da qualidade do ajuste.

Chen e Buja (2009) utilizaram dois conjuntos de dados em seus experimentos computacionais: *Sculpture Face* (TENENBAUM *et al.*, 2000) e *Frey Faces* (ROWEIS, SAUL, 2000). O conjunto de dados *Sculpture Face*, inclui 698 imagens de uma escultura de um rosto humano. As imagens são de uma mesma escultura, variando três condições: perfil da esquerda para direita, de cima para baixo e a direção de iluminação, parâmetro angular que assume três valores. Cada imagem possui 64x64 *pixels*, portanto a dimensão do espaço da imagem é 4096.

A Tabela 1 apresenta valores do critério Continuidade Local medidos, com parâmetro k' com valor 6. O resultado obtido pela metodologia proposta corresponde a colunas $EMLS_{K=6}$, as demais colunas são exatamente iguais àquelas apresentadas por Chen e Buja (2009). Da segunda até a quarta coluna, tem-se os métodos PCA, MDS, Isomap e *Local Linear Embedding* (LLE) (ROWEIS, SAUL, 2000). Nas duas últimas colunas, tem-se os resultados obtidos pelo método Escalonamento Multidimensional Local (CHEN, BUJA, 2009), coluna $LMDS_{K=6}$, e os resultados obtidos pela metodologia proposta, Escalonamento Multidimensional Local Suavizado, coluna $EMLS_{K=6}$, ambos os métodos com parâmetro k com valor 6. Os valores $N_{k'=6} = 5{,}216332$ e $M_{k'=6} = 0{,}8693887$ foram obtidos pelo método $EMLS_{K=6}$ com parâmetro $t = 0{,}0003929626$.

Tabela 1: *Sculpture Face Data: LC meta-criteria* para $k' = 6$.

Métodos	PCA	MDS	Isomap	LLE	$LMDS_{K=6}$	$EMLS_{K=6}$
$N_{k'=6}$	2,6	3,1	4,5	2,8	5,2	5.2
$M_{k'=6}$	0,43	0,52	0,75	0,47	0,87	0.87

O conjunto de dados *Frey Faces* (ROWEIS, SAUL, 2000), inclui 1.965 imagens da face de uma única pessoa, cujo nome é Brendan Frey, tomadas em quadros sequenciais a partir da fragmentação de imagens de um vídeo. Cada imagem possui 20x28 *pixels*, portanto a dimensão do espaço da imagem é 560.

A Tabela 2 apresenta os valores do critério Continuidade Local medidos, com parâmetro k' com valores 12 e 4. São apresentados os resultados obtidos pelo método Escalonamento Multidimensional Local, coluna $LMDS_{K=12}$, e os resultados obtidos pela metodologia proposta, Escalonamento Multidimensional Local Suavizado, coluna $EMLS_{K=12}$, ambos os métodos com parâmetro k com valor 12. Os valores $N_{k'=12} = 4{,}63257$ e $M_{k'=12} = 0{,}3860475$ foram obtidos pelo método $EMLS_{K=12}$ com parâmetro $t = 0{,}8047611$.

Nas duas últimas colunas da Tabela 2, constam os resultados para o método Escalonamento Multidimensional Local com parâmetro k com valor 4. Os valores $N_{k'=4} = 5{,}163359$ e $M_{k'=4} = 0{,}4302799$ foram obtidos pelo método $EMLS_{K=4}$ com parâmetro $t = 828{,}5301$.

Tabela 2: *Frey Faces Data: LC meta-criteria* para $k' = 12$.

Métodos	PCA	MDS	Isomap	LLE	KPCA	$LMDS_{K=12}$	$EMLS_{K=12}$	$LMDS_{K=4}$	$EMLS_{K=4}$
$N_{k'=12}$	3,6	4,8	4,2	3,2	3,7	4,6	4,6	5,1	5,1
$M_{k'=12}$	0,3	0,4	0,35	0,27	0,31	0,38	0,38	0,43	0,43

Nos dois conjuntos de dados e em todos os experimentos, os resultados obtidos pela metodologia proposta foram iguais aos obtidos em (CHEN, BUJA, 2009).

5. Conclusões

Comparado com outros enfoques tradicionais para o problema de redução de dimensionalidade, tais como PCA, MDS, Isomap, LLE e KPCA, o método Escalonamento Multidimensional Local produz bons resultados e em alguns casos resultados até superiores. Sendo assim, pode ser considerado um método eficaz e promissor para o problema de redução de dimensionalidade.

Neste artigo é apresentada uma nova abordagem para o método de redução de dimensionalidade Escalonamento Multidimensional Local. A minimização das distorções entre a projeção no espaço reduzido e no espaço original dos dados não é uma tarefa trivial, tendo a abordagem metodológica proposta se mostrado eficaz na busca de um mínimo local profundo.

A formulação proposta torna o problema continuamente diferenciável, permitindo a aplicação dos métodos de otimização sem restrições mais robustos e eficientes. Considerando a métrica Continuidade Local, os valores obtidos pela metodologia proposta foram iguais aos obtidos por Chen e Buja (2009). Na literatura não foi possível encontrar um programa ou biblioteca com o método Escalonamento Multidimensional Local, dessa forma, não foi possível uma comparação de resultados com os mesmos pontos iniciais e o mesmo número de iterações. De todo modo, para todos os experimentos foram reportados os valores do parâmetro t, permitindo comparações futuras por outros pesquisadores que queiram replicar o experimento.

Como trabalho futuro propõe-se a disponibilização de uma biblioteca em R, pois o método Escalonamento Multidimensional Local demonstrou ser uma boa alternativa frente a outros métodos da literatura. Além disso, deve ser destacado que a abordagem da suavização hiperbólica em outros métodos da classe MDS, como por exemplo nos métodos de Sammon e Supervised MDS, apresentaram um excelente desempenho em comparação com outros algoritmos tradicionais.

Referências

BAGIROV, A. M., AL NUAIMAT, A., SULTANOVA, N. Hyperbolic Smoothing Function Method for Minimax Problems. **Optimization**, 62(6), 759-782, 2013.

BORG, I., GROENEN, P. **Modern Multidimensional Scaling: Theory and Applications**. New York, NY 10013, 2005.

BORG, I., GROENEN, P. J., MAIR, P. **Applied Multidimensional Scaling and Unfolding**. New York, NY: Springer, 2017.

COX, T. F., COX, M. A. A. **Multidimensional Scaling**, Chapman & Hall, 2000.

BUJA, A. Local Multidimensional Scaling for Nonlinear Dimension Reduction, Graph Drawing, and Proximity Analysis, **Journal of the American Statistical Association**, 104(485), pp. 209-219, 2009.

CHEN, L., BUJA, A. Local Multidimensional Scaling for Nonlinear Dimension Reduction, Graph Layout and Proximity Analysis (**Doctoral Dissertation**) University of Pennsylvania, 2006, http://www-stat. wharton. upenn. edu/buja/PAPERS/lmds-chen-buja. pdf.

FRANCE, S. L., CARROLL, J. D. Two-Way Multidimensional Scaling: A Review. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, Part C (Applications and Reviews), 41(5), 644-661, 2011.

FRIEDMAN, J., HASTIE, T., TIBSHIRANI, R. **The Elements of Statistical Learning** (Vol. 1, No. 10). New York, NY, USA: Springer Series in Statistics, 2001.

GRACIA, A., GONZÁLEZ, S., ROBLES, V., MENASALVAS, E. A Methodology to Compare Dimensionality Reduction Algorithms in Terms of Loss of Quality. **Information Sciences**, 270, 1-27, 2014.

LEEUW, J.D., MAIR, P., Multidimensional Scaling Using Majorization: SMACOF in R, **Journal of Statistical Software,** 31(3), pp. 1-30, 2009. URL http://www.jstatsoft.org/v31/i03/.

LEE, J. A., VERLEYSEN, M. **Nonlinear Dimensionality Reduction**. Springer Science & Business Media, 2007.

LUBKE, D. C., XAVIER, V. L., VENCESLAU, H. M., XAVIER, A. E. Flying Elephants Method Applied to the Problem of Covering Solid Bodies with Spheres. **International Journal of Metaheuristics**, 7(1), 30-42, 2018.

LUENBERGER, D. G., YE, Y. Linear and Nonlinear Programming. **International Series in Operations Research & Management Science**. Springer, Berlin. doi, 10, 978-0, 2008.

R Core Team. R: A Language and Environment for Statistical Computing. **R Foundation for Statistical Computing**, Vienna, Austria. 2014. URL http://www.R-project.org/.

TENENBAUM, J.B., DE SILVA, V., LANGFORD, J.C. A Global Geometric Framework for Nonlinear Dimensionality Reduction, **Science 290**, n. 5500, pp. 2319–2323, 2000.

ROWEIS, S. T., SAUL, L. K. Nonlinear Dimensionality reduction by Local Linear Embedding, **Science 290**, pp. 2323–2326, 2000.

SAMMON, J.W. A Nonlinear Mapping for Data Structure Analysis, **IEEE Transactions on Computers**, 18(5), pp.401-409, 1969.

VENABLES, W.N., RIPLEY, B.D. **Modern Applied Statistics with S-PLUS**, Springer Science & Business Media, 2013.

VENNA, J., PELTONEN, J., NYBO, K., AIDOS, H., & KASKI, S. Information Retrieval Perspective to Nonlinear Dimensionality Reduction for Data Visualization. **Journal of Machine Learning Research**, 11(Feb), 451-490, 2010.

XAVIER, A.E., XAVIER, V.L. Solving The Minimum Sum-Of-Squares Clustering Problem by Hyperbolic Smoothing and Partition into Boundary and Gravitational Regions, **Pattern Recognition**, v. 44, pp. 70-77, 2011.

XAVIER, A.E., GESTEIRA, C.M., XAVIER, V.L. Solving the Continuous Multiple Allocation P-Hub Median Problem by the Hyperbolic Smoothing Approach, **Optimization**, 64(12), pp.2631-2647, 2015.

XAVIER, V.L. Resolução do Problema de Agrupamento segundo o Critério de Minimização da Soma das Distâncias, (**Dissertação de Mestrado**) COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro, 2012.

XAVIER, V. L., FRANÇA, F. M., XAVIER, A. E., LIMA, P. M., A Hyperbolic Smoothing Approach to the Multisource Weber Problem, **Journal of Global Optimization**, 60(1), pp.49-58, 2014a.

XAVIER, A.E., XAVIER, V.L., Flying Elephants: A General Method for Solving Non-Differentiable Problems, **Journal of Heuristics**, pp.1-16, 2014.

XAVIER, V.L. Uma Abordagem Eficiente Para Métodos Não Lineares de Redução de Dimensionalidade e uma Nova Metodologia Supervisionada para Redução de Dimensionalidade Baseada em Protótipos, (**Tese de Doutorado**), COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro, 2016.

WITTEN, D.M., TIBSHIRANI, R. Supervised Multidimensional Scaling for Visualization, Classification, and Bipartite Ranking, **Computational Statistics & Data Analysis**, 55(1), pp. 789-801, 2011.

HYPERBOLIC SMOOTHING LOCAL MDS

Abstract

This paper presents a new approach to the Local MDS method. This dimensionality reduction method is of the metric multidimensional scaling class and has the characteristic of being non-differentiable. With the use of hyperbolic smoothing, a smoothed formulation and a new algorithm are proposed. Computational results obtained in solving classical test problems are presented and show the efficacy of the proposal in comparison to those available in the literature.

Key-words: *Local MDS, Dimensionality Reduction, Multivariate Statistics, R Program.*