

CADERNOS DO IME – Série Estatística

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ
ISSN impresso 1413-9022 / ISSN on-line 2317-4536 - v. 41, p. 30 - 44, 2016
DOI: 10.12957/cadest.2016.25323

ANÁLISIS ESTADÍSTICO IMPLICATIVO DE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS SOBRE NÚMEROS REALES DE INGRESANTES A LA UNIVERSIDAD

Liliana Noemí Caputo

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE – Argentina
proflcaputo@gmail.com

María Josefa Jorge

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE – Argentina
majorijor1965@gmail.com

Ricardo Fabián Espinoza

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE – Argentina
rrfespinoza@gmail.com

Eduardo Adolfo Porcel

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE – Argentina
porcelfel@arnet.com.ar

José Luis Romero

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE – Argentina
joseluisromero@live.com.ar

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar la técnica de análisis estadístico implicativo (ASI) y ejemplificar su uso mediante el análisis de un ítem de la prueba de diagnóstico tomada en 2013 a ingresantes a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste (Argentina). Como resultado del análisis se obtuvieron algunas relaciones establecidas por los sujetos evaluados entre el conocimiento de ciertos números reales como elementos de \mathbb{R} - o de alguno de sus subconjuntos (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) - y la representación correcta en la recta real de cuatro de ellos. La ausencia de algunas relaciones conceptuales esperadas (como por ejemplo entre el conocimiento del conjunto numérico al que pertenece un determinado número y su representación en la recta numérica) permite detectar aquellas relaciones conceptuales que no integran la red cognitiva de los sujetos evaluados, lo cual parece estar indicando la necesidad de prever y poner en práctica actividades de enseñanza que favorezcan el establecimiento de dichas relaciones.

Palabras clave: Análisis Estadístico Implicativo, Cuasi Implicación, Similitud, Cohesión, Números reales.

1. Introducción

El Análisis Estadístico Implicativo (ASI, sigla de su nombre en francés *Analyse Statistique Implicative*), es una técnica de análisis estadístico multivariante diseñada a partir de la década del 80 del siglo XX, por Régis Gras y colaboradores de la Escuela Politécnica de la Universidad de Nantes, Francia, en respuesta a problemas propios de la investigación en Didáctica de la Matemática.

En efecto, si bien ha sido utilizado en otras disciplinas, el ASI surge como una técnica de la Estadística Exploratoria (ORÚS y GREGORI, 2013) que busca relacionar entre sí las respuestas a distintos ítems de una evaluación o encuesta, diferenciándose de las técnicas estadísticas clásicas de asociación de variables, en que estas relaciones no son simétricas, sino que se modelizan mediante una implicación de tipo $a \Rightarrow b$.

Para fundamentar la existencia de estas relaciones, Régnier (2013) menciona que Gras *et al* (2009) partieron de la hipótesis de que "si un ejercicio es más complejo que otro, entonces todo alumno que resuelve el primero debería resolver también el segundo" (*). Así, por ejemplo, Gagatsis (2002) concluye que los alumnos que conocen y comprenden la definición formal de valor absoluto resuelven correctamente aquellos problemas que pueden resolverse con nociones más intuitivas de dicha función.

El objetivo de este trabajo es presentar esta técnica de análisis y ejemplificar su uso mediante el análisis de un ítem de evaluación, a fin de establecer la existencia o no de relaciones entre el conocimiento de ciertos números como elementos de \mathbb{R} - o de algunos de sus subconjuntos (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) por un lado y la representación correcta en la recta real de cuatro de ellos por el otro.

2. Metodología

El ASI es un método de Estadística Multivariada que permite descubrir reglas inductivas no simétricas para modelar relaciones del tipo "si a, entonces, casi b" entre variables o entre reglas. La medida de calidad confirmatoria de la implicación se define a partir de la inverosimilitud de la aparición de contraejemplos es decir, aquellos casos en que se presenta la variable (o regla) a, pero no la variable b.

En principio, la aplicación de ASI requiere dos conjuntos finitos, uno de variables (V) y otro de sujetos (E). Dichas variables pueden ser dicotómicas, frecuenciales o por

intervalos. Sólo se describirá su uso en los casos en que las variables son dicotómicas puesto que son de esa clase las que se utilizarán en el ejemplo presentado a continuación.

A cada sujeto x del conjunto finito E de n sujetos, se asocia, por abuso de escritura, las funciones del tipo: $x \rightarrow a(x)$, donde $a(x)=1$, si x satisface o posee el carácter a y $a(x)=0$, en caso contrario. Entonces, como en la Lógica clásica, para que la implicación $a \Rightarrow b$ sea verdadera, si a es verdadera, también lo debe ser b , en este caso el conjunto formado por los individuos que respondieron correctamente el ítem a de una evaluación (es decir, el conjunto $A = \{x \in E / a(x) = 1\}$) debe estar incluido en el de los que contestaron correctamente el ítem b ($B = \{x \in E / b(x) = 1\}$). Sin embargo, en la práctica pueden darse casos de estudiantes que pertenecen a A , pero no a B , sin que ello implique que no existe relación entre a y b . Para determinar la validez o no de la implicación, se relativizará el peso de los contraejemplos (cuando $a \wedge \neg b$ es verdadera, que equivale a los $x \in A - B$) a partir de los cardinales de E , A , B y $A - B$.

Si se eligen dos subconjuntos X e Y de E (no se conoce *a priori* la existencia de vínculos entre ellos), coordinables con A y B , respectivamente, por definición $a \Rightarrow b$ es admisible al nivel de confianza $1 - \alpha$ si, la probabilidad $\Pr[\text{Card}(X - Y) \leq \text{Card}(A - B)] \leq \alpha$ (GRAS y KUNTZ, 2009).

Esta probabilidad puede calcularse usando la distribución Hipergeométrica (cuando la población es finita y la muestra es de tamaño fijo), o con la Binomial (población infinita y tamaño de muestra fijo) o con Poisson (población infinita y tamaño de muestra aleatorio). Los modelos respectivos y sus pruebas de hipótesis pueden encontrarse en Bodín, 1997.

Ahora bien, la distribución Hipergeométrica $H(N, r, n)$ (siendo N el tamaño de la población, r el número de casos favorables al suceso de interés y n el tamaño de la muestra) converge a la Binomial $B(n, p)$ cuando $N \rightarrow \infty$, y $p = r/N$ permanece constante. A su vez, la $B(n, p)$ converge a la distribución de Poisson $P(\lambda)$ cuando n es grande, p pequeña y $\lambda = np$ menor que, aproximadamente, 7 por lo que en definitiva ambas leyes tienden a la distribución de Poisson (WACKERLY *et al*, 2010).

Cuando la probabilidad se modela con la distribución de Poisson, Lerman *et al* (1981) establecen que el parámetro de dicha ley es $\lambda = \frac{\text{Card}(A) \cdot \text{Card}(E - B)}{\text{Card}(E)}$ y, por lo tanto,

$\Pr[\text{Card}(X - Y) = s] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^s}{s!}$. Como consecuencia, la probabilidad para que el azar prevalezca, bajo la hipótesis de ausencia de vínculo a priori entre a y b, es:

$$\Pr[\text{Card}(X - Y) \leq \text{Card}(A - B)] = \sum_{s=0}^{\text{Card}(A-B)} \frac{\lambda^s}{s!} e^{-\lambda}$$

Por otra parte, se define el índice de implicación como el número:

$$q(a, -b) = \frac{\text{Card}(A-B) - \frac{\text{Card}(A) \cdot \text{Card}(E-B)}{\text{Card}(E)}}{\sqrt{\frac{\text{Card}(A) \cdot \text{Card}(E-B)}{\text{Card}(E)}}}$$

que es la tipificación del número de contraejemplos usando la media y desviación típica de Poisson y que estima la diferencia entre $\text{Card}(A - B)$ y el valor que habría tomado si a y b fueran independientes (a la cual denotamos con $Q(a, -b)$). En los casos que legitiman convenientemente la aproximación (por ejemplo, $\frac{\text{Card}(A) \cdot \text{Card}(E-B)}{\text{Card}(E)} \geq 4$), $Q(a, -b)$ se aproxima a la distribución Normal (0,1), por lo que - a partir de $q(a, -b)$ - se define la intensidad de implicación, que mide la calidad inductiva de a sobre b, como sigue:

$$\varphi(a, b) = \begin{cases} 1 - \Pr[Q(a, -b) \leq q(a, -b)] = \frac{1}{2\pi} \int_{q(a, -b)}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt & \text{si Card}(B) \neq \text{Card}(E) \\ 0 & \text{si Card}(B) = \text{Card}(E) \end{cases}$$

Entonces, se puede redefinir la admisibilidad de la implicación $a \Rightarrow b$ al nivel de confianza $1 - \alpha$, diciendo que la misma es admisible a dicho nivel si $\varphi(a, b) \geq 1 - \alpha$. Ahora bien, cuando el cardinal de E es muy grande, se hace necesario considerar qué sucede con la calidad de la implicación contrarrecíproca puesto que si $\text{Card}(A)$ y $\text{Card}(B)$ son pequeños con respecto a $\text{Card}(E)$, los cardinales de sus complementos serán considerables. Es por eso que se incluye el concepto de entropía de Shannon que permite definir un índice que integra la información a partir de un número pequeño de contraejemplos de $a \Rightarrow b$ y de su contrarrecíproca.

Llamando $\alpha = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}$, $\beta = \frac{\text{Card}(E-B)}{\text{Card}(E)}$ y $t = \frac{\text{Card}(A-B)}{\text{Card}(E)}$, definimos la entropía de b habiéndose dado a, como sigue (4):

$$h_1(t) = \begin{cases} -(1 - t\alpha^{-1})\log_2(1 - t\alpha^{-1}) - t\alpha^{-1}\log_2 t\alpha^{-1} & \text{si } t \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right[\\ 1 & \text{si } t \in \left[\frac{\alpha}{2}, \alpha\right] \end{cases}$$

De la misma manera, la entropía de $\neg a$, si no se verifica b está dada por:

$$h_2(t) = \begin{cases} -(1 - t\beta^{-1})\log_2(1 - t\beta^{-1}) - t\beta^{-1}\log_2 t\beta^{-1} & \text{si } t \in \left[0, \frac{\beta}{2}\right[\\ 1 & \text{si } t \in \left[\frac{\beta}{2}, \beta\right] \end{cases}$$

Así pues, el índice mencionado es $i(a, b) = \sqrt[4]{(1 - h_1^2(t))(1 - h_2^2(t))}$.

Finalmente, se define la intensidad entrópica de $a \Rightarrow b$ mediante el número $\psi(a, b) = \sqrt{i(a, b) \cdot \varphi(a, b)}$.

Para calcular las intensidades de una implicación (clásica o entrópica) se utiliza el software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) (COUTURIER, 2009), el cual presenta las implicaciones mediante un digrafo ponderado, sin ciclos, que se denomina grafo implicativo y que permite comprender e identificar las relaciones de implicación obtenidas al hacer el análisis. En la Lógica clásica, $(a \Rightarrow b \wedge b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ es una tautología (Ley del Silogismo Hipotético) pero, cuando las implicaciones son las cuasi implicaciones definidas anteriormente, no es necesariamente válida dicha ley de inferencia. Por ello, consideraremos que se cumple dicha ley si, y sólo si, $\psi(a, c) \geq 0,5$. De esta manera, vemos que pueden modelizarse reglas que implican otras reglas (llamadas meta-reglas o R-reglas) y pueden darse las siguientes posibilidades:

- a) Que $a \Rightarrow b$ (donde a y b pueden ser variables o reglas) implique una variable c.
- b) Que una variable a implique una regla $b \Rightarrow c$ (donde c y b pueden ser variables o reglas). En este caso puede ser útil recordar que la implicación antes mencionada es equivalente a $(a \wedge b) \Rightarrow c$.
- c) Que una regla implique a otra es decir, $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (d \Rightarrow c)$.

Así pues, la estructura que deviene de la combinación de estas posibilidades es jerárquica y supone una perspectiva dinámica y no estática, como es la de una simple tipología. Para describir esta estructura jerárquica se hace necesario introducir el concepto de cohesión que supone la definición de un orden parcial entre clases de variables. Para ello se definen:

La cohesión de la clase (a, b) es el número $c(a, b)$ definido como sigue:

$$c(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(a, b) = 1 \\ 0 & \text{si } \psi(a, b) = 0,5 \\ \sqrt{1 - H^2} & \text{si } \psi(a, b) = p \wedge H = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p) \end{cases}$$

De la misma manera, la cohesión de la clase ordenada $A = (a_1, \dots, a_r)$ es la media geométrica de las cohesiones de parejas a_i y a_j (con i, j variando de 1 a r e $i \neq j$), que se anula únicamente cuando es nula alguna de dichas cohesiones.

Para determinar las clases de variables e interpretar las R-reglas surgidas al analizar un conjunto de datos con ASI, CHIC proporciona gráficos (similares a los dendogramas) a los que se los llama árbol de similaridad y árbol jerárquico, respectivamente (COUTURIER, 2009).

3. Ejemplo de aplicación

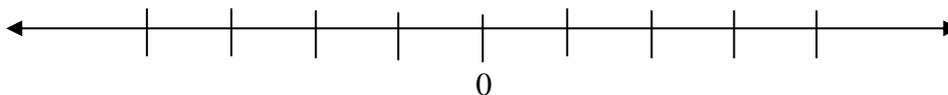
La población en estudio está conformada por 565 ingresantes, en el año lectivo 2013, a las carreras de grado que se dictan en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste.

A comienzos de dicho ciclo lectivo, se administró a los estudiantes un test de diagnóstico a fin de recabar información respecto a sus conocimientos matemáticos previos. De dicha evaluación, se ha extraído un ítem para ejemplificar el uso del ASI:

I) Dada la siguiente tabla, indica en cada casillero con SI o NO si el número dado pertenece o no al conjunto indicado en cada fila.

$C_i \backslash X_j$	2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-2	$\sqrt{2}$	-1,5	$-\sqrt{49}$	$\sqrt{-1}$
N (Naturales)								
Z (Enteros)								
Q (Racionales)								
I (Irracionales)								
R (Reales)								

II) Representa en la siguiente recta los números $-2, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \sqrt{2}$ (en forma aproximada)



Las implicaciones esperadas al analizar previamente el ejercicio se presentan en la Tabla 1. En ella, se previeron relaciones entre el hecho de representar correctamente

un número y saber a qué subconjunto de \mathbb{R} pertenece, pero no implicaciones de las representaciones entre sí. El sentido de las implicaciones de la Tabla 1 son consecuencia de la hipótesis (*) de ASI, teniendo en cuenta que:

- Las implicaciones de la fila A son las contrarrecíprocas de las esperables en función del orden (en sentido de inclusión) que existe entre los subconjuntos reales considerados.
- Cualquiera sea la definición de \mathbb{R} con la que se construya la teoría, se conocen primero los números racionales y, posteriormente, los irracionales (Filas B y C).
- En la Enseñanza Elemental se conocen antes los racionales no negativos, que los negativos (Fila D); primero las fracciones que sus desarrollos decimales (Fila E); primero los números reales y después los complejos (Fila F).
- Representar un número en la recta real supone nociones de orden y de completitud de \mathbb{R} , que no son necesarias para identificar el subconjunto real al que pertenece (Filas G y H).

Tabla 1: Implicaciones esperadas en el análisis previo del ejercicio

Fila	Implicaciones esperadas	Saberes subyacentes
A	$x \notin \mathbb{R} \Rightarrow x \notin \mathbb{Q} \wedge x \notin \mathbb{I} \wedge x \notin \mathbb{Z} \wedge x \notin \mathbb{N}$ $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \wedge x \notin \mathbb{N}$ $x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$
B	$\sqrt{2} \in \mathbb{I} \Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$	Ningún número real es racional e irracional a la vez
C	$\sqrt{2} \in \mathbb{I} \Rightarrow -\sqrt{49} \in \mathbb{Q}$	2 no es “cuadrado perfecto”, por lo cual sus raíces cuadradas son irracionales, pero como 49 sí lo es, sus raíces cuadradas son racionales.
D	$\frac{-3}{4} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$	El cociente entre dos números enteros, con divisor no nulo, es un número racional.
E	$-1,5 \in \mathbb{Q} \Rightarrow 3/2 \in \mathbb{Q}$ $-1,5 \in \mathbb{Q} \Rightarrow -3/4 \in \mathbb{Q}$	Los racionales se pueden escribir como fracción o como “números. con coma” con una cantidad finita o infinita periódica de cifras decimales.
F	$\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \Rightarrow -\sqrt{49} \in \mathbb{R}$	Las raíces cuadradas de números reales negativos no son números reales.
G	Representar correctamente $3/2$, $-3/4$ y $\sqrt{2}$ implica reconocer que ninguno de ellos es entero ni natural	Un número real no entero es mayor que su parte entera y menor que su parte entera más uno.
H	Representar correctamente $-3/4$ y -2 implica saber que no son números naturales.	Todo número natural es positivo.

Para realizar el análisis del ítem I del ejercicio, se utilizaron 40 variables dicotómicas ($C_i x_j$ con $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 8$) que toman el valor 1 si el alumno respondió correctamente al ítem y 0 en caso contrario. Dados i, j fijos, los posibles valores de $C_i x_j$ ($x_j \in C_i$) se dan en la Tabla 2.

Tabla 2: Posibles valores de las variables V_{ij} : $x_j \in C_i$, con $i = 1, \dots, 5$ y $j = 1, \dots, 8$.

Valor de Verdad de $x_j \in C_i$	Respuesta del alumno	Valor de $C_i x_j$
Verdadera	SI	1
	NO	0
Falsa	SI	0
	NO	1

Es decir, por ejemplo, si el alumno respondió que -2 NO pertenece a \mathbb{N} , la variable $N-2 = 1$ (pues la respuesta es correcta); de igual manera, si el alumno respondió que -2 NO es un número racional, $Q-2 = 0$ (por ser incorrecta la respuesta).

Cabe aclarar que por limitaciones del software utilizado, la notación adoptada para $\sqrt{2}$, $-\sqrt{49}$ y $\sqrt{-1}$ es $r2$, $-r49$ y $r-1$, respectivamente. Asimismo, -1.5 , $3/2$ y $-3/4$ se denotan con -15 , 32 y -34 , respectivamente.

En el análisis del ítem II, se utilizaron las siguientes 24 variables: 6 relacionadas con -2 ($N-2$, $Z-2$, $Q-2$, $I-2$, $R-2$ y $REP-2$); 6 vinculadas a $\frac{3}{2}$ ($N32$, $Z32$, $Q32$, $I32$, $R32$ y $REP32$); 6 a $-\frac{3}{4}$ ($N-34$, $Z-34$, $Q-34$, $I-34$, $R-34$ y $REP-34$) y 6 a $\sqrt{2}$ ($Nr2$, $Zr2$, $Qr2$, $Ir2$, $Rr2$ y $REPr2$).

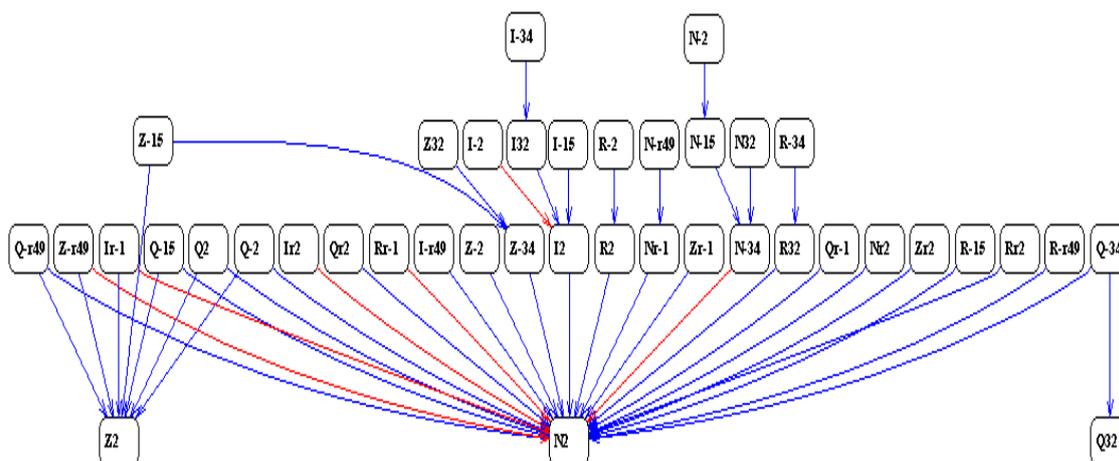
Dado que el tamaño de la muestra es grande, se utilizó la implicación entrópica (GRAS y KUNTZ, 2009; BODIN,1997) y, como su tamaño es aleatorio, (ya que no se podía predecir cuantos de los ingresantes acudirían al diagnóstico), se utilizó la ley de Poisson de parámetro $\lambda = \frac{\text{Card}(A) \cdot \text{Card}(E-B)}{\text{Card}(E)}$. Se verificó que para todas las combinaciones de pares de variables en estudio se cumpliera la condición $\frac{\text{Card}(A) \cdot \text{Card}(E-B)}{\text{Card}(E)} > 4$ por la cual el índice de implicación puede aproximarse por la ley normal centrada reducida (GRASS y KUNTZ, 2009).

Se utilizó el software CHIC versión 3.5 (COUTURIER, 2009) para la obtención de resultados. Las implicaciones detectadas son admisibles al nivel de confianza 0,95 y 0,99, en azul y rojo, respectivamente, en los grafos de las Figuras 1 y 4.

4. Resultados

Al realizar el análisis del ítem I del ejercicio, en el correspondiente grafo implicativo (Figura 1) se observaron 41 implicaciones (entre las cuales hay 6 que se cumplen con un 99% de confianza).

Figura 1: Grafo Implicativo correspondiente al ítem a.



Fuente: Elaboración propia.

Del análisis de las implicaciones representadas en el grafo implicativo de la Figura 1, se puede afirmar que los alumnos evaluados identifican:

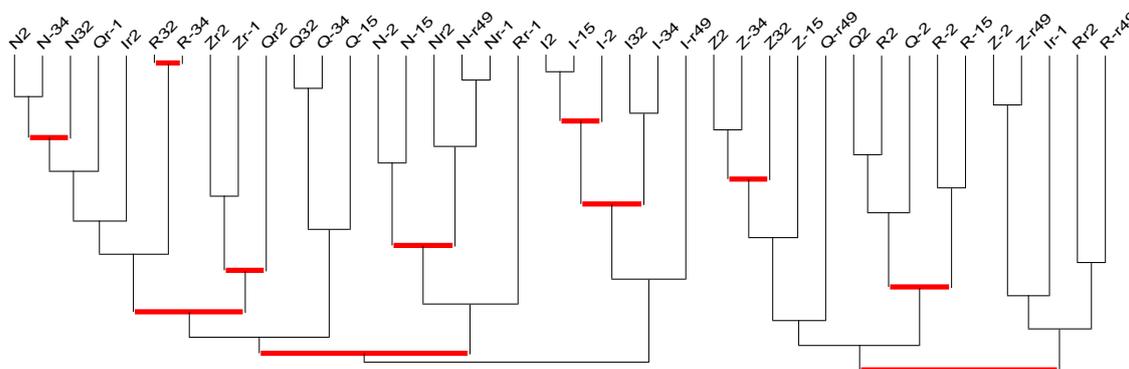
- A los naturales como números positivos ($N-2 \rightarrow N-15 \rightarrow N-34 \rightarrow N2$) es decir, a \mathbb{N} como el mínimo de la cadena de inclusiones de los subconjuntos reales.
- Como racionales a las fracciones irreducibles ($I-34 \rightarrow I32$ y $Q-34 \rightarrow Q-32$), lo cual se había previsto en la Tabla 1.
- A las fracciones irreducibles y a $-1,5$ como números no enteros ($Z32 \rightarrow Z-34$ y $Z-15 \rightarrow Z-34$), relaciones no previstas en la Tabla 1.
- Que un número y su opuesto pertenecen a un mismo conjunto numérico, aunque sólo en los casos de irracionales y reales, ($I-2 \rightarrow I2$; $R-2 \rightarrow R2$), relaciones que tampoco fueron previstas en la Tabla 1.

Por otra parte, cabe señalar que no se han detectado algunas relaciones que se habían anticipado en el análisis matemático - didáctico previo, referidas a los siguientes saberes:

- Que los conjuntos de números racionales y de irracionales son disjuntos por ser complementarios (Fila B de la Tabla 1).
- Las raíces cuadradas de un número real negativo no son números reales (Fila F de la Tabla 1).
- Definiciones de potenciación y radicación en \mathbb{R} (Filas C y F de la Tabla 1).

En el árbol de similaridad (Figura 2) se observan dos clases de cuasi equivalencias: una (C1) que contiene aquellas respuestas que identifican correctamente a los números naturales, a los racionales no enteros (como tales y como reales), a raíz de dos como irracional y a la de -1 como no racional ni real. La otra, C2, agrupa las respuestas que identifican a 2, -2 y $-\sqrt{49}$ como enteros, racionales y reales, a -1,5 y a las fracciones irreducibles como números no enteros y a raíz cuadrada de -1 como no irracional. Llama la atención que mientras Qr-1 y Rr-1 están en C1, Ir-1 está en C2, ya que las respuestas provenientes de C1 podrían interpretarse en el sentido de que algunos estudiantes creen que raíz de -1 es irracional y no real, mientras que otros (cuyas respuestas pertenecen a C2) que es racional y real; esto estaría dando cuentas de falta de claridad respecto a la inclusión de \mathbb{I} en \mathbb{R} y de la definición (restringida) de radicación en \mathbb{R} .

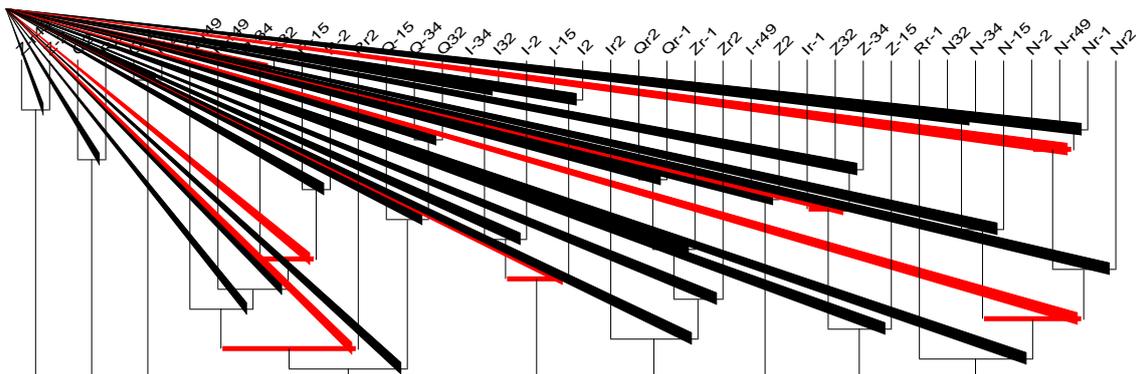
Figura 2: Árbol de similaridad. Clases de cuasi equivalencias de las respuestas al ítem I.



Fuente: Elaboración propia.

En cambio, al observar el árbol jerárquico (Figura 3), se detectan 4 reglas y 5 meta-reglas, de las cuales 4 incluyen implicaciones al nivel de confianza de 0,99.

Figura 3: Árbol jerárquico.R-reglas correspondientes al ítem I.



Fuente: Elaboración propia.

Las reglas y R-reglas antes mencionadas (y hasta dicho nivel de confianza), se enuncian e interpretan a continuación:

$$\left[-\sqrt{49} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left(-\sqrt{49} \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(\left(\frac{-3}{4} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{3}{2} \in \mathbb{R} \right) \Rightarrow (-1,5 \in \mathbb{R} \Rightarrow -2 \in \mathbb{R}) \right) \right) \right] \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

Esta meta-regla indica que los estudiantes saben que los números racionales son reales, pero sus saberes respecto a \mathbb{Q} no son suficientes para determinar si $\sqrt{2}$ es o no racional.

$$\left[\left(\frac{-3}{4} \notin \mathbb{I} \Rightarrow \frac{3}{2} \notin \mathbb{I} \right) \Rightarrow -2 \notin \mathbb{I} \right] \Rightarrow (-1,5 \notin \mathbb{I} \Rightarrow 2 \notin \mathbb{I})$$

Puede observarse que aquí los alumnos reconocen a los racionales (positivos y negativos, enteros y no enteros) como no irracionales. Sin embargo, no se evidencia relación entre la identificación de los números racionales como no irracionales y la identificación de raíz de 2 como irracional (9).

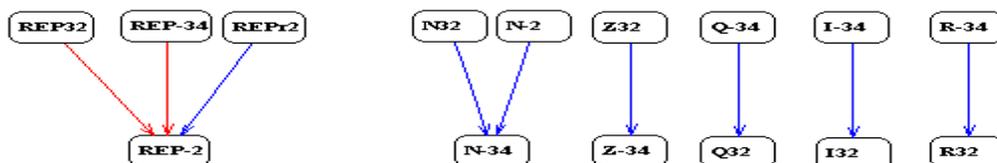
$$\sqrt{-1} \notin \mathbb{I} \Rightarrow \left(\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-3}{4} \notin \mathbb{Z} \right)$$

Esta meta-regla estaría dando cuentas de un conocimiento amplio del conjunto de números racionales y enteros y de que no toda raíz cuadrada es un número irracional; en ese sentido, esta R-regla se complementa con la 1, en la cual se reconocía que $-\sqrt{49} \in \mathbb{Q}$.

$$\left[\left(\frac{3}{2} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \frac{-3}{4} \notin \mathbb{N} \right) \Rightarrow -1,5 \notin \mathbb{N} \right] \Rightarrow [-2 \notin \mathbb{N} \Rightarrow (-\sqrt{49} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{-1} \notin \mathbb{N}) \Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{N}]$$

En este caso, se observa un profundo conocimiento del conjunto de números naturales, que podría deberse a que es el primer conjunto numérico estudiado en la enseñanza elemental.

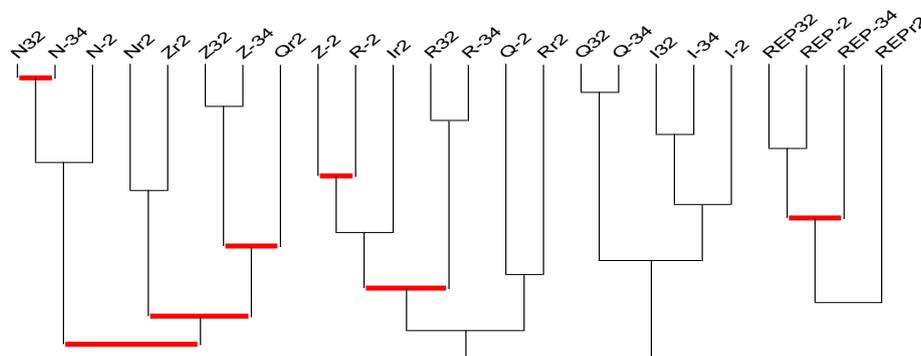
Figura 4: Grafo Implicativo correspondiente al ítem II.



Fuente: Elaboración propia.

En el análisis del grafo implicativo (Figura 4) puede visualizarse que no existe implicación entre el hecho de saber a qué conjunto numérico pertenece un determinado número y su representación correcta en la recta numérica. Más aún, las representaciones gráficas sólo se implican entre sí. Entre estas últimas las implicaciones más fuertes (a 0,99 de confianza) se dan entre las fracciones irreducibles ($3/2$ y $-3/4$) y -2 . Las implicaciones que no involucran a las representaciones en la recta real, ya han sido interpretadas al enunciar los resultados del ítem I.

Figura 5: Árbol de similaridad. Clases de cuasi equivalencias de las respuestas al ítem II.



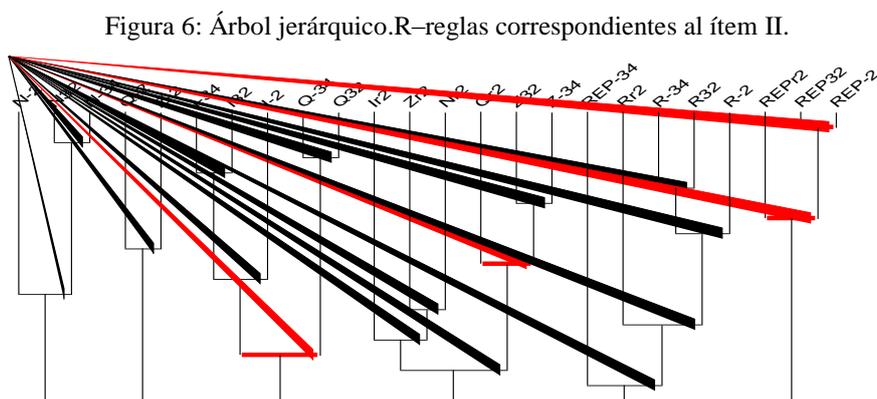
Fuente: Elaboración propia.

Al analizar el árbol de similaridad de la Figura 5, se forman 3 clases de cuasi equivalencia, dos de las cuales están incluidas en alguna de las dos clases de cuasi equivalencia de la Figura 3; en cambio, puede observarse que $C3 = \{REP32, REP-2, REP-34, REPr2\}$ posee un solo nodo significativo a nivel 11, y agrupa a las representaciones en la recta numérica correctas de los números dados.

Se completó el análisis del ítem II con la determinación de una jerarquía implicativa en el conjunto de variables, para lo cual se construyó el árbol jerárquico que se presenta en la Figura 6.

Vemos que existe una única meta-regla a nivel de confianza del 0,99 que involucra a la representación de los números dados en la recta real: $[REPr2 \Rightarrow (REP32 \Rightarrow REP-2)]$ que es equivalente a $(REPr2 \wedge REP32) \Rightarrow REP-2$. Esta meta-regla puede interpretarse como que el representar a raíz de dos y a $3/2$ mediante dos puntos entre dos enteros consecutivos (1 y 2), lleva trivialmente a la representación correcta de un número entero, más allá de su signo. Esta meta-regla trae implícito otro saber imprescindible para lograr el éxito en las representaciones de números en la recta real: la noción de orden y completitud de \mathbb{R} , conceptos que no resultan necesarios para identificar si un número pertenece o no a un determinado subconjunto real. Por ello, no es casual que en el grafo implicativo no se visualicen relaciones entre las variables del ítem I y las del ítem II.

Por último, cabe mencionar que algunas variables que en el árbol de similitud se encontraban en una misma clase, en el jerárquico están en subclases diferentes, como por ejemplo la representación en la recta numérica de $-3/4$. Es importante señalar que las implicaciones del grafo implicativo se conservan en el árbol jerárquico, con la única excepción de $REP-3/4 \Rightarrow REP-2$.



Fuente: Elaboración propia.

5. Conclusiones

El análisis realizado puso en evidencia el establecimiento de algunas relaciones conceptuales, como también la no aparición de otras establecidas en el análisis previo, como por ejemplo la existencia de relaciones entre el conocimiento del conjunto numérico

al que pertenece un número y su representación en la recta real (lo que se confirma al analizar tanto el grafo implicativo como el árbol de similaridad, aunque no el árbol jerárquico) debido – tal vez – a la necesidad de poner en juego otros conceptos, como el orden y la completitud del conjunto de números reales.

Las relaciones esperadas a partir del análisis previo involucran hacer funcionar una red de conocimientos matemáticos, lo cual no estaría sucediendo en forma adecuada en el caso de los sujetos evaluados, ya que no logran poner en juego algunos saberes y utilizarlos como herramientas para la resolución de los ítems del ejercicio propuesto. Por ello, amerita diseñar y llevar a la práctica en los primeros cursos de Matemática de la Facultad, actividades de enseñanza que favorezcan el establecimiento de las relaciones mencionadas.

Referencias

BODIN, A. Modèles sous-jacents à l'analyse implicative et outils complémentaires. Prépublication IRMAR. N° 97-32, 1997.

COUTURIER, R. CHIC: utilización y funcionalidades. **En Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana.** Orús, P.; Zamora, L.; Gregori, P. (Eds). Universitat Jaume I de Castellón (España) y Universidad de Oriente (Cuba). 2009. pp 51 - 64.

GAGATSI, A. A multidimensional analysis of obstacles to student's understanding in Mathematics. **Memorias del V Simposio de Educación Matemática. EMAT Editores.** ISBN N° 987 – 20239 – 1 – 3. Chivilcoy, Argentina. 2002.

GRAS, R.; KUNTZ, P. El Análisis Estadístico Implicativo (ASI) en respuesta a problemas que le dieron origen. **En Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana** (2009). Orús, P.; Zamora, L.; Gregori, P. (Eds). Universitat Jaume I de Castellón (España) y Universidad de Oriente (Cuba). pp 3 – 50.

LERMAN, I.C.; GRAS, R. ROSTAM, H. Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires, I et II, *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1981, n° 74,,5-35 et n° 75, 5-47.

ORÚS, P.; GREGORI, P. **Utilización del ASI en la investigación en Didáctica de la Matemática y en la formación del profesorado**, 2013. Disponible en <http://es.slideshare.net/LuisTamami1/asi-dm-defecador2013>. Acceso en 2015.

RÉGNIER J.C. Extracto de la obra **Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités** (2009). Gras, R.; Régnier J.C.; Guillet F. (Eds), 2013. Disponible en <http://sites.univ-lyon2.fr/asi7/?page=0&lang=es>. Acceso en 2016.

SPAGNOLO, F.; GRAS, R.; RÉGNIER, J.C. Una medida comparativa de las matemáticas entre el análisis a priori y la contingencia. **En Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana.** Orús, P.; Zamora, L.; Gregori, P. (Eds). Universitat Jaume I de Castellón (España) y Universidad de Oriente (Cuba). 2009. pp 143 – 158.

WACKERLY, D.; MENDENHALL, W.; SCHEAFFER, R. **Estadística matemática con aplicaciones.** Cengage Learning Editores, México. 2010.

IMPLICATIVE STATISTICAL ANALYSIS OF PREVIOUS KNOWLEDGE ABOUT REAL NUMBERS FROM STUDENTS ENTERING UNIVERSITY

Abstract

The aim of this paper is to present the technique of implicative statistical analysis (ASI) and exemplify its use by analyzing an item of the diagnostic test taken in 2013 to entrants to the Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura - Universidad Nacional del Nordeste (Argentina) . The investigation revealed some conceptual relations established by the students between their knowledge about certain real numbers' characteristics and their membership to \mathbb{R} or any of its subsets (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) and at the same time between correct representations on the real line of four of them. The absence of some expected conceptual relationships (for example, between knowledge of the numerical set a certain number belongs to and its representation on the number line) allows us to detect those conceptual relationships that are not part of the cognitive network of the subjects evaluated, which seems to indicate the need to provide and implement teaching activities that favor the establishment of such relations.

Key-words: *Implicative Statistical Analysis, Quasi Implication, Similarity, Cohesion, Real numbers.*