

CADERNOS DO IME – Série Estatística

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ
Rio de Janeiro - RJ - Brasil
ISSN 1413-9022 / v. 27, p. 45 - 58, 2009

A UTILIZAÇÃO DE GRÁFICOS DE CONTROLE DE SOMA ACUMULADA (CUSUM) PARA MONITORAMENTO DE UM PROCESSO DE USINAGEM

Custodio da Cunha Alves
Universidade da Região de Joinville - UNIVILLE
custodio.alves@univille.br

Altair Carlos Cruz
Universidade da Região de Joinville - UNIVILLE
altair@univille.br

Elisa Henning
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC
dma2eh@joinville.udesc.br

Arnoldo Schmidt Neto
Universidade da Região de Joinville - UNIVILLE
arnoldo.schmidt@univille.br

Resumo

Este trabalho apresenta os gráficos de controle CUSUM como um procedimento alternativo e mais apropriado que os tradicionais gráficos de Shewhart para detectar pequenos desvios médios do valor nominal de um processo de usinagem. O objetivo deste trabalho é investigar a partir de um estudo comparativo se há diferença significativa quanto a sensibilidade existente entre a utilização destes gráficos e os gráficos de Shewhart para detectar pequenas mudanças na média do processo. Na realização deste estudo utilizou-se dados reais de um processo de usinagem para aplicação de gráficos de controle CUSUM no monitoramento deste processo, o que atualmente é feito com gráficos de Shewhart. Este estudo foi fundamental para definir a melhor escolha entre os gráficos para a análise estatística deste processo.

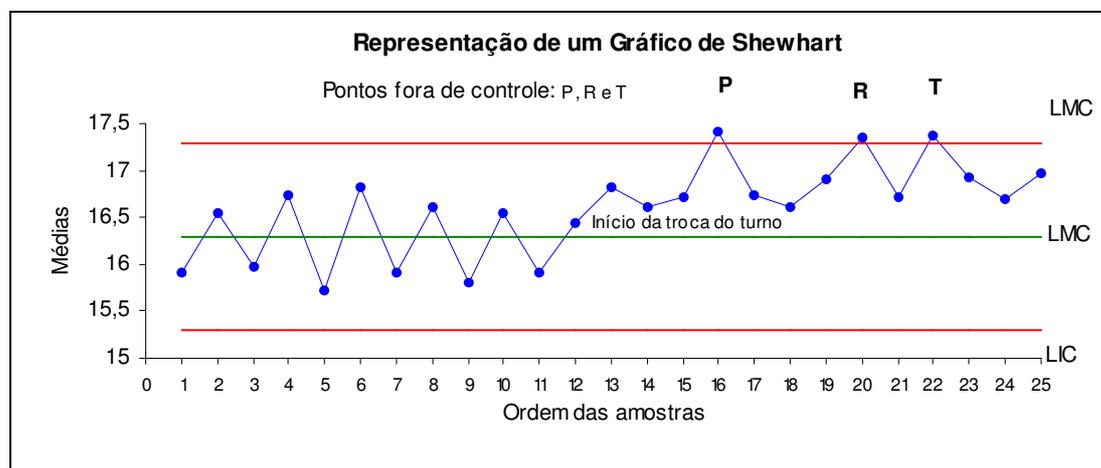
Palavras-chave: Ferramentas estatísticas; Gráficos CUSUM; Processos industriais.

1. Introdução

Os gráficos de controle estatístico de processos mais conhecidos e amplamente aplicados no setor industrial são ainda, sem dúvida, os tradicionais gráficos de Shewhart. No Brasil, por exemplo, o mais comum deles (o par de gráficos \bar{X} e R), que mostra a média de vários subgrupos racionais de observações sucessivas, é enfatizado na maioria das literaturas de controle de qualidade existentes como se não houvesse nenhum outro tipo de gráfico. Apesar de extremamente eficazes, estas ferramentas estatísticas não são as únicas disponíveis para monitorar a qualidade de um processo. Em alguns casos, outros tipos de gráficos de controle podem ser utilizados com a mesma finalidade, e com vantagens. É o caso dos gráficos de controle de Soma Acumulada (Cumulative Sum Control Charts - CUSUM).

Os gráficos de controle de Shewhart proporcionam uma grande sensibilidade no diagnóstico de causas especiais esporádicas ou intermitentes como, por exemplo, a troca de operadores em uma produção que opera em dois ou três turnos. Se, por hipótese, os operadores de um dos turnos não estiverem treinados, este fato se tornará evidente no gráfico de Shewhart, através de pontos fora de controle estatístico, conforme figura 1.

Figura1 - Exemplo de um gráfico de controle de Shewhart



Já nos casos em que há uma causa identificável no sistema, que gera uma pequena e constante variação na média ou na variabilidade (amplitude ou desvio padrão), os gráficos de controle de Shewhart apresentarão uma tendência nos valores plotados para as amostras. Apesar de existirem algumas regras práticas para executar este tipo de análise (sete pontos consecutivos do mesmo lado da linha central, por

exemplo, é considerado como “sinal de alarme”), detectar esta tendência nem sempre é fácil, e exige conhecimento por parte do responsável pela análise do processo. E mesmo que venha a ser percebida, é difícil determinar através dos gráficos de controle de Shewhart, quando o processo começou a deteriorar-se. Exatamente nestes casos, o uso de gráficos de controle de soma acumulada (CUSUM) pode ser vantajoso, isto é, quando existe outro tipo de causa especial persistente até que uma ação seja tomada para eliminar a causa. Seu processo de decisão baseia-se na soma acumulada dos resultados, e não em observações isoladas de amostras. Isto torna os gráficos CUSUM mais sensíveis a uma pequena e contínua alteração das condições do processo.

Hawkins (1998) justifica que os gráficos CUSUM são mais apropriados do que os gráficos de Shewhart para diagnosticar pequenas e persistentes mudanças de um processo usando o seguinte exemplo: Num laboratório químico se um lote novo de substância não tiver a composição adequada, os ensaios são influenciados e o lote é substituído. Utilizando os gráficos de Shewhart dificilmente se conseguirá em tempo hábil a substituição deste lote, a menos que estas causas especiais persistentes tenham efeitos muito grandes. Além disso, os gráficos de Shewhart não são suficientemente adequados para estimar quando, e de quanto a mudança de um processo pode ser um indicativo útil para diagnosticar uma determinada causa especial persistente.

2. Gráficos de Controle de Soma Acumulada (Gráficos CUSUM)

Os gráficos de controle CUSUM inicialmente propostos na Inglaterra por Page (1954) são alternativas viáveis aos gráficos de Shewhart. Estes gráficos incorporam diretamente, toda a seqüência de informações demarcando as somas acumuladas dos desvios de \bar{x}_j em relação ao valor-alvo (μ_o , valor nominal). Supondo que amostras de tamanho n são coletadas, \bar{x}_j é a média da j -ésima amostra e μ_o é o valor desejado para a média do processo. A estatística CUSUM é formada demarcando a quantidade da equação (1) junto à amostra i

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (\bar{x}_1 - \mu_o) \\
 C_2 &= (\bar{x}_1 - \mu_o) + (\bar{x}_2 - \mu_o) = C_1 + (\bar{x}_2 - \mu_o) \\
 C_3 &= (\bar{x}_1 - \mu_o) + (\bar{x}_2 - \mu_o) + (\bar{x}_3 - \mu_o) = C_2 + (\bar{x}_3 - \mu_o) \\
 &\dots \\
 C_i &= \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - \mu_o) = C_{i-1} + (\bar{x}_i - \mu_o)
 \end{aligned} \tag{1}$$

onde C_i é a soma acumulada incluindo a i -ésima amostra, pois combinam informações de diversas amostras. Se o processo permanece sob controle para o valor desejado μ_o , as somas acumuladas definidas em (1) descrevem um percurso aleatório com média zero. Porém, se a média muda para algum valor acima $\mu_1 > \mu_o$, então a tendência ascendente se desenvolverá na soma acumulada C_i . Reciprocamente, se a média muda para algum valor abaixo $\mu_1 < \mu_o$, a soma acumulada C_i terá uma direção negativa. Por esta razão, se nos pontos demarcados aparecer uma tendência para cima ou para baixo, deve-se considerar isto como uma evidência de que a média do processo mudou e uma busca de causas assinaláveis deve ser realizada.

Há dois procedimentos diferentes para monitorar a média de um processo via gráficos de controle CUSUM: Algoritmo CUSUM e Máscara V.

O procedimento Algoritmo CUSUM tem a propriedade de armazenar os valores das somas unilaterais acumuladas do processo analisado. Seja \bar{x}_i a i -ésima observação do processo. Quando o processo está sob controle, \bar{x}_i tem uma distribuição normal com média μ_o e desvio padrão σ . Se o processo tende a se afastar do valor pretendido, o gráfico CUSUM indica a presença de uma causa assinalável que deve ser investigada, como acontece no caso dos gráficos de Shewhart. As estatísticas C_i^+ e C_i^- são denominadas Cusum superior e Cusum inferior unilaterais, conforme equações (2) e (3).

$$C_i^+ = \max[0, \bar{x}_i - (\mu_o + K) + C_{i-1}^+] \quad (2)$$

$$C_i^- = \max[0, (\mu_o - K) - \bar{x}_i + C_{i-1}^-] \quad (3)$$

onde $C_0^+ = C_0^- = 0$. Se C_i^+ ou C_i^- , excede o intervalo de decisão H , o processo é considerado fora de controle. Um valor razoável para H é cinco vezes o desvio padrão σ do processo. Nas equações (2) e (3), K é denominado de valor de referência e, corresponde aproximadamente a metade do valor, no qual há interesse em detectar rapidamente determinada mudança entre μ_o (valor nominal) e o valor da média fora de controle μ_1 . Se esta mudança é esperada em unidades de desvio padrão, então K representa a metade da magnitude desta mudança ou

$$K = \frac{\Delta}{2} = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = \frac{\delta}{2} \sigma \quad (4)$$

onde δ é o tamanho da mudança em unidades de desvio padrão; σ é o desvio padrão; μ_0 o valor pretendido (alvo); Δ o valor do deslocamento que estamos interessados e $\mu_1 = \mu_0 + \Delta$ o valor da média fora de controle. A outra abordagem envolve a padronização dos dados apresentados, supondo que os valores da variável \bar{x}_i seguem distribuição $N(0,1)$ conforme equações (5) e (6):

$$C_i^+ = \text{máx}[0, y_i - k + C_{i-1}^+] \quad (5)$$

$$C_i^- = \text{máx}[0, -k - y_i + C_{i-1}^-] = \text{mín}[0, k + y_i + C_{i-1}^-] \quad (6)$$

Para isso, antes de efetuar os cálculos de C_i^+ e C_i^- padroniza-se a variável \bar{x}_i fazendo $\bar{y}_i = \frac{(\bar{x}_i - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$ como a variável padronizada de \bar{x}_i .

No procedimento Algoritmo CUSUM, o gráfico é projetado pela escolha adequada do valor de referência K e do intervalo de decisão H (limites inferior e superior do gráfico CUSUM) capaz de minimizar falsos alarmes para a amplitude da mudança que se deseja detectar.

Montgomery (2004), recomenda que o melhor modelo matemático para selecionar estes valores é defini-los conforme equações (7) e (8):

$$K = k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (7)$$

$$H = h \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ (LSC)} \quad H = -h \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ (LIC)} \quad (8)$$

onde parâmetros k e h são frequentemente usados com os valores $k=0,5$ e $h=5$ respectivamente, e σ o desvio padrão dos dados.

Em geral, recomenda-se que esses parâmetros sejam escolhidos de modo a fornecer um bom desempenho (ARL) do gráfico CUSUM. Se escolhermos $h=4,77$, isso resultará em um gráfico CUSUM com $ARL_0 = 370$ amostras, o que coincide com o valor de ARL_0 para um gráfico de controle de Shewhart com os limites 3σ habituais. Hawkins (1993), recomenda os valores para k e os correspondentes valores de h que resultam $ARL_0 = 370$, conforme tabela 1.

Tabela.1 Valores de k e h que geram $ARL_0 = 370$ sugeridos para o Algoritmo CUSUM

| | | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|------|
| k | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1,0 | 1,25 | 1,5 |
| h | 8,01 | 4,77 | 3,34 | 2,52 | 1,99 | 1,61 |

Fonte: Hawkins (1993)

Os valores de k e h conforme tabela (1) são calculados com uma confiabilidade idêntica a do gráfico de Shewhart (temos uma probabilidade de 0,27% de cometermos um erro tipo I, isto é, de o gráfico apresentar um sinal de alarme sem que a média efetivamente tenha se deslocado de seu valor original).

No procedimento Algoritmo CUSUM, é possível a partir dos valores das somas unilaterais acumuladas do processo analisado determinar a estimativa do valor médio do processo ($\hat{\mu}$) após a emissão do sinal fora de controle (Montgomery, 2004):

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \mu_o + K + \frac{C_i^+}{N^+}, se & C_i^+ > H \\ \mu_o + K + \frac{C_i^-}{N^-}, se & C_i^- > H \end{cases} \quad (9)$$

O procedimento Máscara V proposto por Barnard (1959) é um método gráfico alternativo utilizado além do Algoritmo CUSUM que permite por inspeção dos pontos representados decidir se ocorreu ou não um desvio no valor médio μ_o desejado. Este procedimento é aplicado a sucessivos valores da estatística CUSUM

$$C_i = \sum_{j=1}^i \bar{y}_j = \bar{y}_i + C_{i-1} \quad (10)$$

onde \bar{y}_i é a observação padronizada $\bar{y}_i = \frac{(\bar{x}_i - \mu_o)\sqrt{n}}{\sigma}$.

Estes dois procedimentos Algoritmo CUSUM e Máscara V apesar de serem diferentes têm a mesma função e apresentam vantagens e desvantagens. A escolha de cada um deles para monitorar a média do processo depende dos recursos computacionais disponíveis para a escolha dos mesmos (Alves, 2003).

Neste artigo, o desenvolvimento do procedimento Algoritmo CUSUM em uma planilha eletrônica MS-Excel®, permite avaliar em tempo real a média do processo para cada ponto plotado no gráfico. Com a utilização do aplicativo RExcel (Neuwirth *et al.*, 2009) é possível efetuar análises estatísticas mais completas, como avaliar a

normalidade e a ausência de auto-correlação dos dados, condição necessária para gráficos CUSUM e Shewhart. O RExcel, que está disponível na Internet, faz com que funções do ambiente GNU R (R Core Development Team, 2009) possam rodar na própria planilha. É, portanto, uma alternativa para aplicação de controle estatístico *on-line* de processos, que pode ser facilmente desenvolvida pelo próprio usuário.

3. Informações do Processo de Usinagem

Os dados reais utilizados neste artigo são referentes a um processo de usinagem do corpo da válvula de descarga cedidos por uma indústria de metais sanitários localizada na cidade de Joinville-SC. Nesse processo, a parte interna do corpo da válvula de descarga é usinada para a obtenção de um alojamento no seu interior onde é colocado para vedar um anel oring de borracha durante a montagem da válvula de descarga.

O processo de usinagem deste alojamento para o anel oring requer uma alta precisão para evitar possíveis vazamentos durante seu uso. Nesse processo, a característica da qualidade utilizada para o monitoramento com gráficos de controle CUSUM é a medida diâmetro do alojamento para o anel de oring do corpo da válvula de descarga cujo valor nominal é $46,515 \pm 0,185$ mm. Esta característica da qualidade é atualmente monitorada via gráficos de controle \bar{X} de Shewhart com 25 amostras de tamanho $n=8$ coletadas diariamente a cada hora de produção. A escolha desta característica da qualidade se deve ao fato de tratar-se de um processo de alta precisão, cuja variação na amplitude da média do processo é extremamente pequena. Esta alta precisão condiciona a aplicação de gráficos de controle com maior sensibilidade na detecção de pequenos desvios, tais como os gráficos CUSUM. Por esta razão, com base em dados históricos e acompanhamentos do processo a partir de dados recentes, decidiu-se detectar um pequeno desvio na média do processo de apenas 0,001mm acima do valor nominal.

Os dados históricos indicam um processo sob controle cujas médias se aproximam a uma distribuição normal com média $\bar{X}_i = 46,515$ mm e desvio padrão de 0,02mm. Os dados recentes deste processo, coluna B (Figura1), também revelam que o valor médio se manteve constante em torno de 46,515mm com um desvio padrão de

0,02mm até a 15^a amostra, e, a partir da 16^a amostra este processo sofreu um acréscimo de 0,001mm passando a ser igual a 46,516mm.

Os dados do processo são: $\sigma_o = 0,02\text{mm}$ (Desvio padrão conhecido do processo); $\mu_o = 46,515\text{ mm}$ (Valor nominal); $\mu_1 = 46,516\text{ mm}$ (Valor médio do processo para o estado fora de controle); desvio do valor nominal $\Delta = 0,001\text{mm}$ e intervalo de decisão H (limites inferior e superior do gráfico CUSUM) obtido a partir da equação 8.

4. Construção dos Gráficos de Controle CUSUM

Para ilustrar a sistemática de desenvolvimento dos gráficos de controle CUSUM, foram utilizados dados reais do processo de usinagem em estudo, conforme Figura 2 (planilha eletrônica).

Existem vários métodos para se construírem gráficos CUSUM. Neste artigo, optamos pela metodologia proposta por Hawkins (1993). Para tal, desenvolveu-se uma planilha eletrônica (figura 2) em ambiente MS-Excel cujas fórmulas inseridas nas células desta planilha geram dados para a análise estatística antecipada do processo, bem como a utilização dos mesmos para a construção dos gráficos de controle.

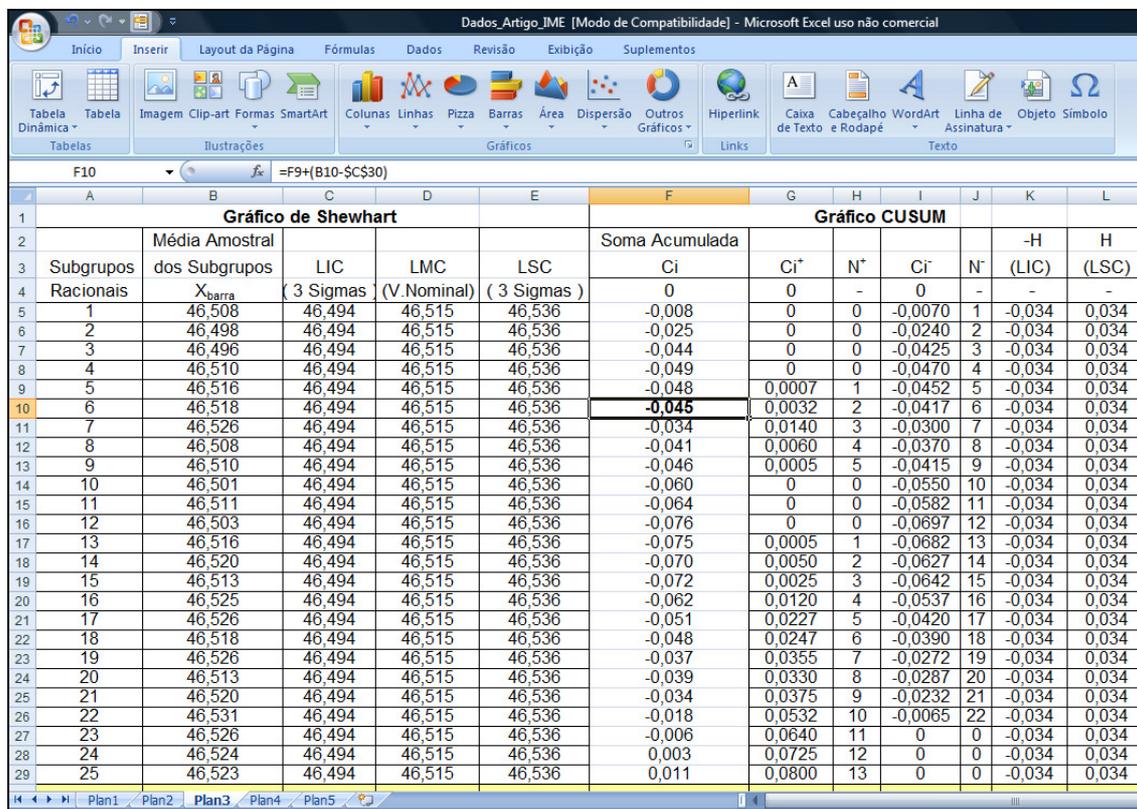
Conforme planilha eletrônica utilizada neste artigo para a construção do gráfico CUSUM, a coluna B apresenta a média dos 25 subgrupos racionais do processo. As colunas C, D e E, representam respectivamente os limites de controle LIC, LMC e LSC do gráfico de controle \bar{X} de Shewhart (3σ) cujos valores são obtidos conforme modelo matemático:

$$\text{LIC} = \mu_o - 3 \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}} \qquad \text{LMC} = \mu_o \qquad \text{LIC} = \mu_o + 3 \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}} \qquad (11)$$

A coluna F representa a Soma Acumulada C_i que é obtida conforme equação (1). As colunas G e I, representam respectivamente, as estatísticas C_i^+ e C_i^- do Algoritmo CUSUM, obtidas pelas equações (2) e (3). As colunas H e J, representam respectivamente os contadores N^+ e N^- de períodos C_i^+ e C_i^- não nulos. As colunas K e L, representam respectivamente os intervalos de decisão H e $-H$ (limites de controle utilizado no Algoritmo CUSUM), obtidos pelas equação (8). Além disso, o valor de referência K (Célula E30), obtido conforme equação (4) e o valor $h=4,77$ (Célula

K30), obtido da tabela 1 cuja escolha se deve a um gráfico CUSUM com confiabilidade idêntica ao gráfico de controle \bar{X} de Shewhart (3σ).

Figura 2 - Planilha eletrônica dos dados gerados a partir das informações do processo



Os dados do processo se comportam segundo uma distribuição normal e não apresentam autocorrelação (figura 3). A verificação da normalidade e independência dos dados do processo foi desenvolvida com auxílio do aplicativo RExcel (NEUWIRTH *et al.* 2009).

Os gráficos de controle: \bar{X} de Shewhart, Algoritmo CUSUM, Status CUSUM e o CUSUM (com a Máscara V) obtidos dos dados gerados a partir da planilha eletrônica (figura 2) são ilustrados nas figuras 4, 5, 6 e 7.

No gráfico \bar{X} de Shewhart (figura 4) nenhum ponto ultrapassa as linhas de controle. O aumento na média do processo não é detectado. É possível melhorar a sensibilidade do gráfico Shewhart com auxílio das regras suplementares, mas a incorporação dessas regras, segundo Costa *et al.* (2004), diminui a simplicidade de interpretação do gráfico e aumenta o número de alarmes falsos.

Figura 3 – Gráficos: Normalidade e Autocorrelação dos dados do processo

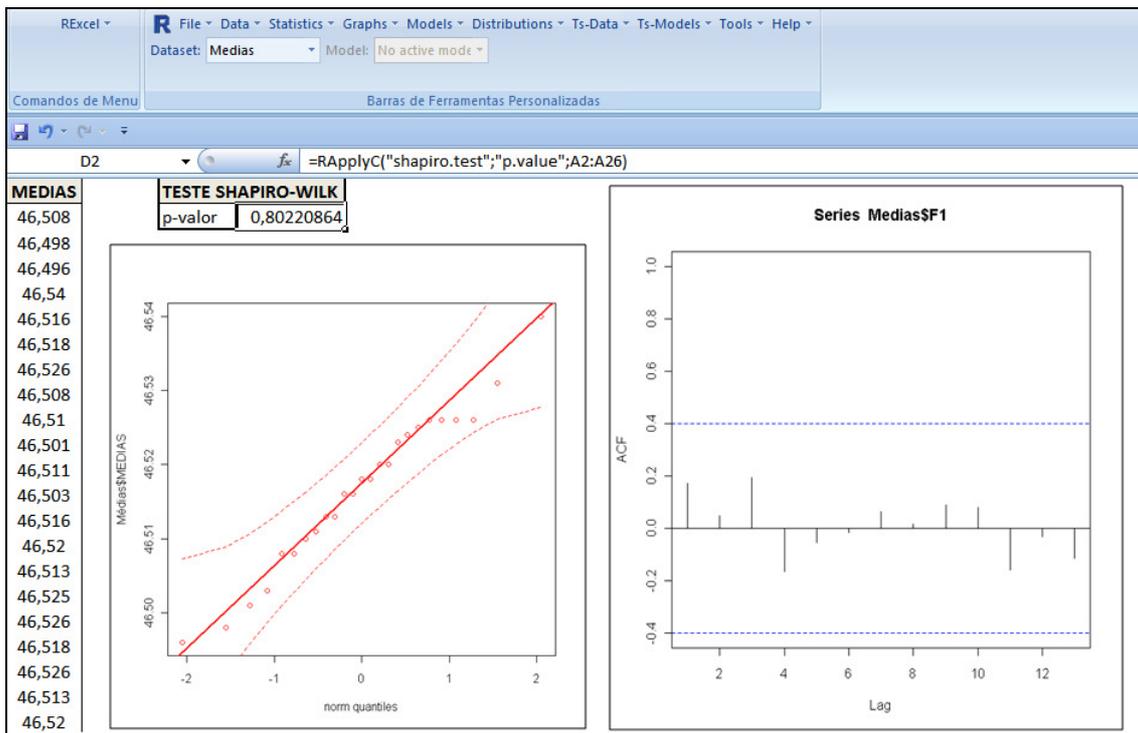
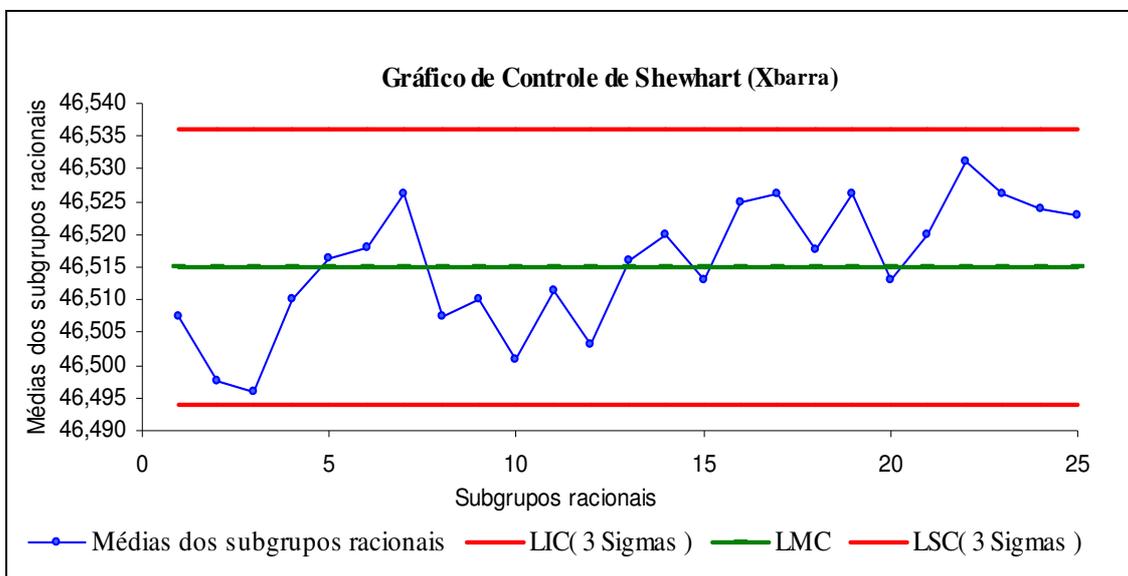


Figura 4 - Gráfico de Controle de Shewhart (Xbarra)



Como se pode observar, o gráfico CUSUM (figura 5) assinala um deslocamento no nível médio do processo a partir da 16ª amostra, ultrapassando o limite superior do

CUSUM na 19ª. Amostra. Isto é reforçado na figura 6, onde num mesmo gráfico, estão os dados observados e as estatísticas CUSUM inferior e superior.

Figura 5 - Gráfico de Controle CUSUM

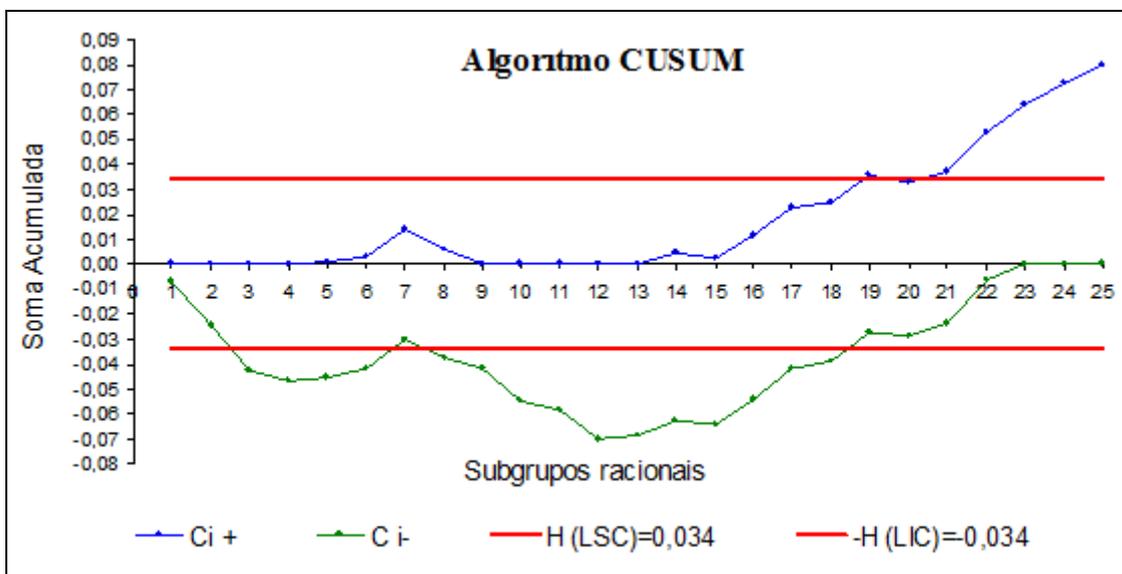
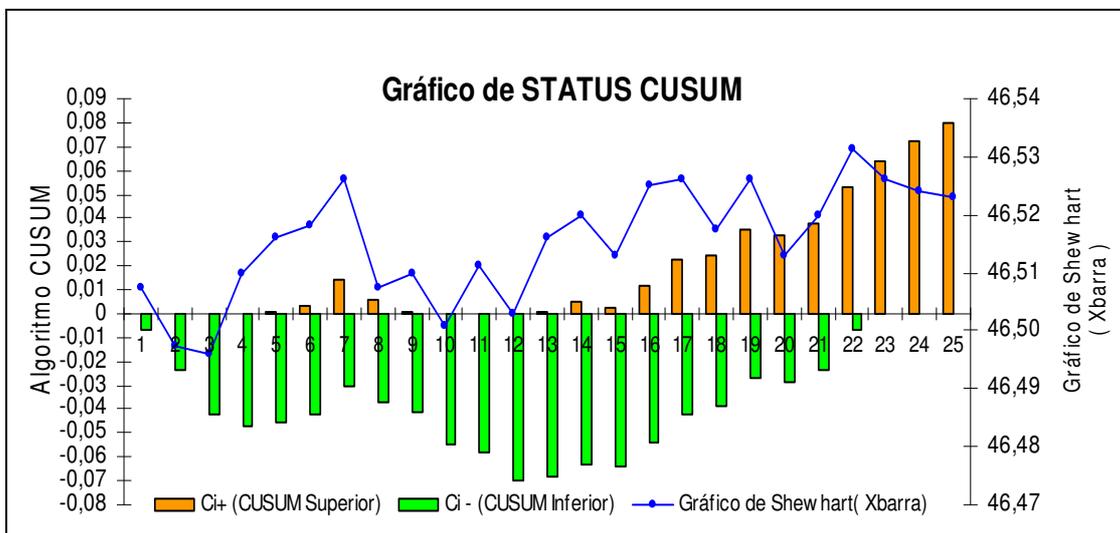
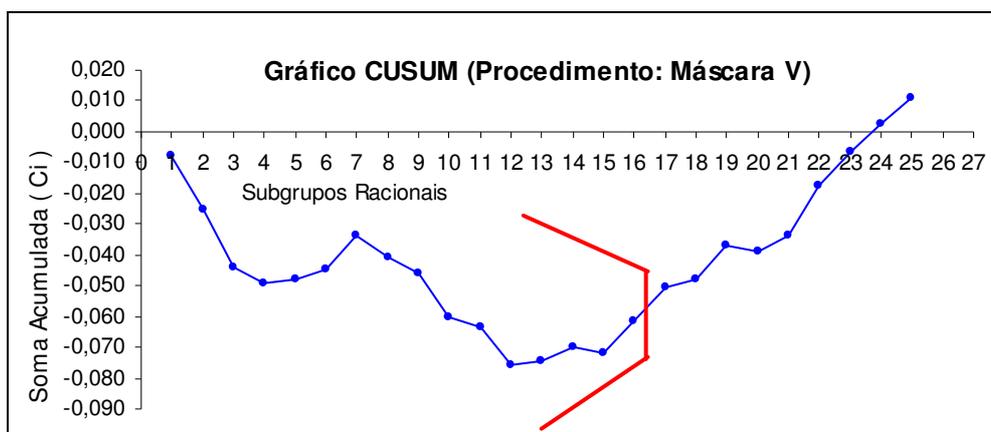


Figura 6 - Gráfico de STATUS CUSUM



A máscara V é apresentada na figura 7. Indica um aumento no valor médio deste processo a partir da 17ª. amostra.

Figura 7 - Gráfico CUSUM (Procedimento: Máscara V)



Verificou-se, analisando os gráficos das figuras 4, 5, 6 e 7, que somente os procedimentos CUSUM sinalizaram o aumento na média, pequeno, mas fundamental, em virtude da precisão desejada neste processo.

Embora os gráficos Shewhart sejam atrativos pela simplicidade de aplicação e uso, só são eficazes para detectar grandes (e repentinas) alterações. Os gráficos CUSUM são ótimos para sinalizar pequenos a moderados (e persistentes) desvios na média de um processo. Além disso, de acordo com Gomes *et al.* (2008), no acompanhamento de uma seqüência do processo, o gráfico CUSUM mostra exatamente onde saiu de controle e quando voltou.

5. Conclusões e Considerações Finais

Os resultados obtidos a partir de dados reais neste artigo, mostram os gráficos CUSUM como ferramentas muito úteis no monitoramento deste processo de usinagem. Em primeiro lugar, porque se mostraram mais sensíveis do que os gráficos de controle \bar{X} de Shewhart para detectar pequena mudança (variação) na média da característica da qualidade monitorada. Em segundo lugar, porque foi possível determinar quando esta mudança ocorreu e estimar tanto a amplitude desta mudança quanto o novo valor médio deste processo para o intervalo após a mudança. Os resultados deste estudo são apresentados a partir dos gráficos de controle desenvolvidos para os dados deste processo (figuras 4, 5, 6 e 7).

- O gráfico de controle \bar{X} de Shewhart com seqüência de pontos que não violam as regras de decisão não foi capaz para detectar um sinal fora de controle. Além disso, não foi suficientemente sensível para sinalizar o momento da mudança no valor médio deste processo.
- O Algoritmo CUSUM assinala mudança no nível médio deste processo com os pontos fora dos intervalos de decisão H e $-H$
- O gráfico CUSUM com a Máscara V confirma um aumento considerável no valor médio deste processo a partir da 17^a amostra, assinalando assim o início deste aumento.

A utilização de dados reais na realização deste estudo foi imprescindível para que fundamentos teóricos sobre gráficos CUSUM fossem transferidos para uma situação prática.

Referências

- ALVES, C.C. **Gráficos de controle CUSUM: um enfoque dinâmico para a análise estatística de processos**. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis, 2003.
- BARNARD, G.A. Control Charts and Stochastic Processes, **Journal of the Royal Statistical Society**, 21, 239-271, 1959.
- COSTA, A. F.B. EPPRECHT, E. K. CARPINETTI, L.C.R. **Controle Estatístico de Qualidade**. São Paulo: Editora Atlas S.A, 2004.
- GOMES, I.C., OLIVEIRA, C.L., MINGOTI, S.A. Estudo da Aplicação de Gráficos de Controle na vigilância de Infecções Hospitalares no Hospital das Clínicas da UFMG. In: SIMPEP - SIMPÓSIO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 15. Bauru. **Anais: ...** Bauru: UNESP, 2008. Disponível em: < http://www.simpep.feb.unesp.br/anais_simpep.php?e=1> Acesso em: 04 mai. 2009.
- HAWKINS, D.M., OLWELL, D.H. Cumulative Sum Control Charting: An Underutilized SPC Tool, **Quality Engineering**, 5 (3), 463-477, 1993
- HAWKINS, D.M., OLWELL, D.H. **Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement**. Engineering and Physical Science, Springer, 1998.
- MONTGOMERY, D. C. **Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade**. 4 ed., Rio de Janeiro: LTC Editora, 2004.
- PAGE, E.S. Continuous Inspection Schemes, **Biometrika**, 41, 100-115, 1954.
- NEUWIRTH, E., HEIBERGER, R., RITTER, C., PIETERSE J. K., VOLKERING, J. **RExcelInstaller: Integration of R and Excel**, (use R in Excel, read/write XLS files), 2009. Disponível em: < <http://rcom.univie.ac.at/> >. Acesso em 02/02/2010.
- R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2009. Disponível em: <http://www.R-project.org>. Acesso em 04/02/2010.

THE USE OF CUMULATIVE SUM CHARTS (CUSUM) FOR MONITORING A MACHINING PROCESS

Abstract

This paper presents the CUSUM control charts as an alternative and more appropriate procedure than the traditional Shewhart charts to detect small deviations from the average value of a machining process. The objective of this work is to investigate based on a comparative study whether there is significant difference in sensitivity between the use of these charts and Shewhart charts in detecting small changes in the process mean. In this study, we used real data from a machining process for application of CUSUM control charts in monitoring this process, which is currently done with Shewhart charts. This study was essential in defining to define the best choice between the charts for statistical analysis of this process.

Keywords: *Statistical Tools, CUSUM charts; Industrial processes.*