

CADERNOS DO IME – Série Estatística

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ
Rio de Janeiro - RJ - Brasil
ISSN 1413-9022 / v. 28, p. 01 - 14, 2010

ANÁLISE DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA O PROBLEMA PROBABILÍSTICO DE LOCALIZAÇÃO- ALOCUÇÃO DE MÁXIMA COBERTURA

Vinícius Moreira Pontin

Universidade Federal do Espírito Santo (CEUNES/UFES)
vpontin@hotmail.com

Ravilo Altoé Garcia

Universidade Federal do Espírito Santo (CEUNES/UFES)
raviloag@hotmail.com

Pedro Bandeira Neto

Universidade Federal do Espírito Santo (CEUNES/UFES)
pedrobandeira@hotmail.com

Glaydston Mattos Ribeiro

Universidade Federal do Espírito Santo (CEUNES/UFES)
Interuniversity Research Centre on Enterprise Networks, Logistics and Transportation -
University of Montreal (CIRRELT/UofM)
glaydstonribeiro@ceunes.ufes.br / Glaydston.Ribeiro@cirrelt.ca

Resumo

O Problema Probabilístico de Localização-Alocação de Máxima Cobertura (PPLAMC) é uma variação do problema de p -medianas que consiste em localizar facilidades (centros), maximizando o número de usuários atendidos (cobertos) e garantindo um bom nível de serviço. O nível de serviço está relacionado aos parâmetros de fila, ou seja, tempo de espera e quantidade de pessoas aguardando atendimento. Sabendo que os intervalos entre chegadas e atendimento variam segundo uma distribuição de probabilidade, os modelos de otimização combinatória do PPLAMC levam em consideração conceitos da Teoria de Filas. Sendo assim, este trabalho tem como objetivo avaliar modelos matemáticos para o PPLAMC utilizando instâncias disponíveis na literatura.

Palavras-chave: PPLAMC, p -medianas, Teoria de Filas.

1. Introdução

Problemas de Localização de Máxima Cobertura (PLMC) têm sido consideravelmente reportados na literatura. O PLMC busca localizar uma quantidade pré-definida de facilidades de tal maneira que se atenda ao maior número possível de indivíduos de uma população, considerada uma dada distância ou um tempo padrão do ponto de demanda. Segundo Corrêa *et al.* (2009a), não se busca com este modelo atender toda a população, mas oferecer o máximo de atendimento com os recursos disponíveis. O conceito de cobertura está relacionado ao fato de se verificar se um ponto está dentro de uma dada distância ou de um dado tempo de deslocamento até a facilidade.

A localização de hospitais, de serviços de atendimento de emergência ou de estações do corpo de bombeiros, e a distância ou o tempo de deslocamento entre os pontos de demanda e as facilidades, constituem fatores importantes para estabelecer o nível de serviço oferecido aos usuários. Em sistemas reais como os citados, as chegadas dos usuários aos centros de atendimento normalmente constituem processos estocásticos, gerando, em muitos casos, o surgimento de filas (FOGLIATTI & MATTOS, 2007). Da Teoria de Filas, um sistema básico de filas é definido por um processo de chegada, um processo de atendimento, um determinado número de servidores (atendentes), se existe ou não limitação de capacidade e pela disciplina de atendimento.

Como os processos reais de atendimento apresentam estocacidade, Marianov & Serra (1998) propuseram modelos matemáticos de PLMC que consideram esta questão nas restrições de capacidade. Os autores definem um limite mínimo para a qualidade dos seus serviços que é refletida no tempo de espera e/ou na quantidade de pessoas que aguardam o atendimento.

Corrêa *et al.* (2009b) definiram a abordagem de Marianov & Serra (1998, 2001) como o Problema Probabilístico de Localização-Alocação de Máxima Cobertura (PPLAMC). De maneira resumida, o PPLAMC busca localizar uma dada quantidade de facilidades com um ou vários servidores, de modo que a população, a uma distância padrão do centro, seja servida adequadamente, isto é, que ninguém fique na fila por um período maior que um dado tempo limite, ou que um usuário, ao chegar ao centro, não encontre um número de outros clientes acima do previsto, com probabilidade

maior ou igual a dado valor definido *a priori*.

Assim, este artigo apresenta uma comparação entre modelos matemáticos encontrados na literatura para o PPLAMC. O modelo de Marianov & Serra (1998) e suas variações, conforme os trabalhos de Cornuéjols & Thizy (1982) e de Murray & Gerrard (1997), são avaliados. Testes computacionais foram realizados com o CPLEX 10 (Ilog, 2006) aplicado às instâncias propostas por Marianov & Serra (1998), Corrêa e Lorena (2006) e Corrêa *et al.* (2007). Espera-se com esse trabalho mostrar qual modelo matemático é mais adequado para o PPLAMC, comparando os tempos de resolução para cada caso e a qualidade das soluções, tendo em vista que Corrêa *et al.* (2009b) encontraram a maioria das soluções ótimas.

O restante do artigo está distribuído como segue. Na Seção 2 é apresentada uma breve revisão sobre o PPLAMC, bem como as formulações matemáticas de interesse: a proposta por Marianov & Serra (1998) e as suas variações obtidas a partir dos trabalhos de Cornuéjols & Thizy (1982) e Murray & Gerrard (1997). Na Seção 3 são apresentados os resultados computacionais obtidos. E por último, na Seção 4, são apresentadas as conclusões do trabalho que envolve a comparação dos modelos matemáticos.

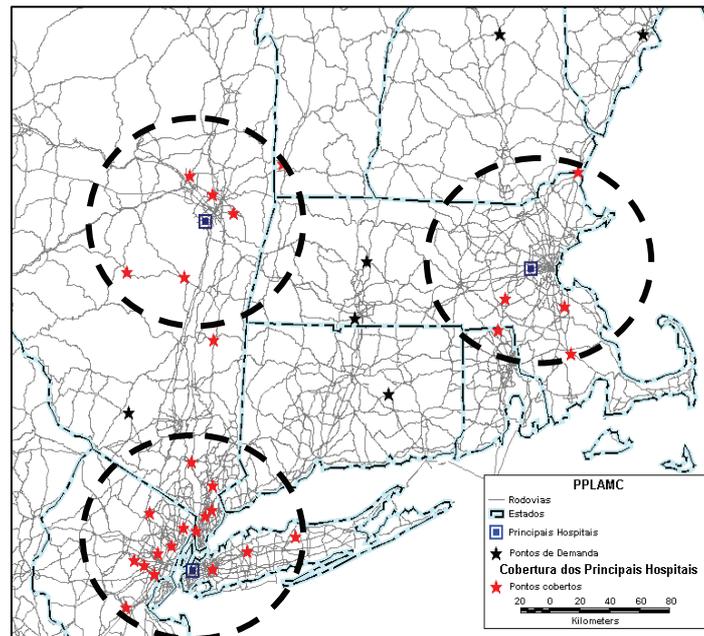
2. Formulações matemáticas para o PPLAMC

O estudo do PLMC teve origem no artigo de Church & Reville (1974) como uma alternativa mais real, pois tanto o SCLP (*Set Covering Location Problem*) – onde se procura identificar e localizar o número mínimo de facilidades, para que nenhuma das distâncias entre um ponto de demanda e a facilidade mais próxima seja superior à distância crítica – quanto o problema dos p -centros (*p-Center Problem*) – em que p facilidades são localizadas de modo que as medidas de dissimilaridade (distância ou tempo) máxima de qualquer ponto de demanda até sua facilidade mais próxima sejam mínimas – requerem que todos os pontos de demanda devem ser cobertos. Sabendo que nem sempre é possível que todos os pontos de demanda sejam cobertos, devido a restrições de recurso, este modelo possui melhor aplicação do que os demais. Assim sendo, a formulação do PLMC tem como objetivo maximizar a cobertura dos pontos de demanda numa distância ou tempo desejados, localizando para tal um número especificado de facilidades.

A Figura 1 ilustra um caso de problema de localização-alocação com três facilidades e um dado raio de cobertura (distância) da facilidade. O termo localização

está relacionado ao fato de se definir efetivamente a localização da facilidade. Já o termo alocação, está relacionado à questão de se definir a associação entre os pontos de demanda e as facilidades, ou seja, de se definir a que facilidade um dado ponto está associado.

Figura 1 – O Problema da Localização de Máxima Cobertura



Fonte: Córrea *et al.* (2009a).

Conforme Lorena (2003), a modelagem matemática do PPLAMC foi desenvolvida como um problema do tipo p -medianas, sendo modificada para contemplar as variáveis de localização e alocação. Atualmente, Corrêa *et al.* (2009a) fizeram testes com relaxações Lagrangianas para o PPLAMC. Os resultados encontrados foram interessantes, porém, com a técnica de Geração de Colunas proposta pelos mesmos autores (CORRÊA *et al.*, 2009b), várias soluções ótimas foram encontradas para instâncias propostas na literatura.

Seja I o conjunto dos pontos de demanda a serem alocados e N_i o conjunto de localizações candidatas que estão dentro de uma dada distância ou tempo do ponto i . Sabe-se que as alocações são representadas por variáveis binárias definidas $x_{ij} \forall i \in I$ e $j \in N_i$. Assim, tem-se $x_{ij} = 1$, se o ponto de demanda i for alocado ao centro j e $x_{ij} = 0$, caso contrário. As localizações, representadas pelas variáveis binárias y_j , recebem valor

igual a 1, se o centro j for selecionado e valor igual a 0, caso contrário. Dado o exposto, normalmente, todo ponto de demanda i é um potencial centro de atendimento j .

Assim, a formulação do PPLAMC proposta por Marianov & Serra (1998) pode ser escrita como segue:

$$v(PPLAMC) = \text{Max} \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in N_i} a_i x_{ij} \right\} \quad (1)$$

(PPLAMC) Sujeito a:

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in I \text{ e } j \in N_i \quad (2)$$

$$\sum_{j \in N_i} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in I \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq \phi_j^{b+2} \sqrt{1-\phi} \quad \forall j \quad (4a)$$

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq \phi_j + \frac{1}{\tau} \ln(1-\phi) \quad \forall j \quad (4b)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p \quad (5)$$

$$y_j \text{ e } x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \text{ e } j \in N_i \quad (6)$$

Sendo:

- a_i : população total do ponto de demanda i ;
- b : número máximo de usuários na fila com probabilidade de, no mínimo, α_f ;
- τ : tempo máximo de espera na fila com probabilidade de, no mínimo, α_f ;
- f_i : taxa de chegadas dos usuários conforme um processo de Poisson;
- ϕ_j : taxa média de atendimento em que o tempo médio de atendimento está exponencialmente distribuído; e
- p : número de facilidades a serem localizados.

A função objetivo descrita em (1) mostra que a população total coberta pelas p facilidades deve ser a maximizada. Já as restrições definidas em (2) indicam que só é possível alocar um ponto de demanda i a um centro j se houver um centro em j . As restrições descritas em (3) garantem que cada ponto de demanda deve ser alocado a, no máximo, um centro, sendo que há a possibilidade de que um ponto de demanda não seja

alocado a nenhum centro. A Figura 1 mostra que alguns pontos não foram alocados a nenhuma facilidade.

As restrições representadas por (4a) e (4b) dizem respeito à questão do comprimento máximo da fila e ao tempo máximo de atendimento, respectivamente, sendo que apenas uma delas é utilizada. As definidas por (4a) garantem que, com probabilidade φ , cada centro tenha no máximo b pessoas na fila, por outro lado, as definidas em (4b) garantem que, com probabilidade φ , o tempo de atendimento em cada centro seja de no máximo τ . As restrições definidas em (5) garante que p centros serão selecionados, e as restrições descritas em (6) que todas as variáveis são binárias.

As restrições descritas em (4a) e (4b) definidas por Marianov & Serra (1998) são para o modelo de fila M/M/1/ ∞ /FIFO, no qual os intervalos entre chegadas estão exponencialmente distribuídos, o tempo de atendimento também está de acordo com uma distribuição exponencial, com apenas um servidor, sem limite de capacidade e a disciplina de fila é do tipo “o primeiro a chegar é o primeiro a ser atendido” (*first in – first out*).

Os usuários de um ponto de demanda i chegam a um centro j com uma taxa de chegada f_i conhecida. Como em um centro j , existe a possibilidade dos usuários virem de vários pontos de demanda i , é necessário levantar a taxa de chegada geral ao centro j . Considerando assim que as chegadas dos usuários de todos os pontos de demanda i acontecem de maneira superposta, a taxa de chegada ao centro j pode ser assim definida (MARIANOV & SERRA, 1998): $\omega_j = \sum_{i \in I} f_i x_{ij}$.

Para haver um equilíbrio no processo de atendimento dos centros, faz-se necessário que $\phi_j \geq \omega_j$.

Marianov & Serra (1998) e Corrêa & Lorena (2006) mostraram que o lado direito das equações (4a) e (4b) são constantes quando calculados para ϕ_j , φ , b e τ , definidos *a priori*. De modo simplificado, essas restrições podem ser reescritas, respectivamente, pelos

dois conjuntos de restrições a seguir, em que $Z_{\phi b \varphi}^j = \mu_j^{b+2} \sqrt{1-\varphi}$ e $Z_{\phi \tau \varphi}^j = \mu_j + \frac{1}{\tau} \ln(1-\varphi)$.

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq Z_{\phi b \varphi}^j \quad \forall j \quad (7a)$$

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq Z_{\phi \tau \varphi}^j \quad \forall j \quad (7b)$$

Com o modelo (1)-(6) originalmente proposto, é possível derivar novos modelos conforme os trabalhos Cornuéjols & Thizy (1982) e Murray & Gerrard (1997). Esses novos modelos são apresentados a seguir.

O primeiro modelo considera o complemento das variáveis de localização, ou seja, $\bar{y}_j = 1 - y_j$ conforme indicado por Cornuéjols & Thizy (1982). Com esta inclusão, obtém-se o seguinte modelo:

$$v(PPLAMC^{CT}) = \text{Max} \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in N_i} a_i x_{ij} \right\} \quad (8)$$

(PPLAMC^{CT}) Sujeito a: (3) e (7a) ou (7b),

$$x_{ij} + \bar{y}_j \leq 1 \quad \forall i \in I \text{ e } j \in N_i \quad (9)$$

$$\sum_{i \in I} \bar{y}_i = |N| - p \quad (10)$$

$$\bar{y}_j \text{ e } x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \text{ e } j \in N_i \quad (11)$$

em que $N = \cup_{i \in I} N_i$.

Observe que o modelo obtido acima (PPLAMC^{CT}) apresenta agora restrições conhecidas como restrições de adjacência ou de conflitos (Restrição 9). Essas restrições foram exploradas por Corrêa *et al.* (2009a, 2009b) para obter grafos de conflitos e grafos de cobertura. Os autores puderam assim aplicar relaxações Lagrangianas e técnicas de decomposição que permitiram resolver instâncias, até então, consideradas difíceis na literatura. Essa estratégia de decomposição a partir de problemas modelados em grafos de conflitos, foi inicialmente proposta por Ribeiro (2007) em sua tese de Doutorado.

O segundo modelo é obtido a partir de outra alteração feita no modelo definido por Marianov & Serra (1998). Essa nova alteração consiste em considerar as restrições de *Balinski* (2) e de capacidade (4a ou 4b) em uma única restrição conforme o trabalho de Murray & Gerrard (1997). Desta forma, uma nova formulação (PPLAMC^{MG}) pode ser obtida, conforme mostrado a seguir:

$$v(PPLAMC^{MG}) = \text{Max} \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in N_i} a_i x_{ij} \right\} \quad (12)$$

(PPLAMC^{MG}) Sujeito a (3), (5), (6)

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq Z_{\phi\phi} y_j \quad \forall j \in N_i \quad (13a)$$

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq Z_{\phi\tau\varphi} y_j \quad \forall j \in N_i \quad (13b)$$

As restrições (13a) substituem as restrições (2) e (7a), pois determinam que somente é possível alocar um ponto de demanda i a um centro j se houver um centro em j , como fazem as restrições (2), além de imporem restrições de capacidade, como fazem as definidas em (7a). De modo análogo, as restrições (13b) substituem as restrições (2) e (7b). Note que estas alterações reduzem o número de restrições.

Com o objetivo de se avaliar qual dos três modelos mostrados é melhor, testes computacionais foram realizados com o auxílio do CPLEX 10.

3. Resultados computacionais

Para os experimentos computacionais, como citado anteriormente, foram utilizadas as instâncias propostas por Marianov & Serra (1998), Corrêa & Lorena (2006) e Corrêa *et al.* (2007). Os testes foram realizados no *solver* CPLEX 10 (ILOG, 2006) com as seguintes configurações: tempo máximo de processamento de 3600s ou 0,01% de *Gap* (veja Equação 14). *Gap* representa a diferença, em termos percentuais, entre os dois limitantes fornecidos pelo CPLEX durante o seu algoritmo de *Branch-and-Bound*: o limitante inferior e o limitante superior. O limitante inferior representa a melhor solução viável encontrada, ou seja, aquela solução que apresenta a maior função objetivo e que não viola nenhuma restrição do problema. Já o limitante superior representa o valor da função objetivo relaxada obtida durante o algoritmo de *Branch-and-Bound*.

Resumidamente, um algoritmo de *Branch-and-Bound* utiliza a técnica “dividir para conquistar”, ou seja, dado um problema de maximização P de natureza inteira mista, este é dividido em um subconjunto de problemas que são resolvidos independentemente. As soluções independentes, quando consideradas juntas, podem violar algumas restrições de P , gerando uma solução inviável, mas por outro lado, a soma das funções objetivo dos subproblemas formam um limitante superior. Além disso, quando uma solução inviável é transformada em uma solução viável, por alguma heurística dentro do algoritmo de *Branch-and-Bound*, tem-se um limitante inferior. Busca-se assim, realizar e analisar várias divisões buscando o maior limitante inferior possível com *gap* igual a zero. Para maiores detalhes sobre a técnica de *Branch-and-Bound*, veja Wolsey (1998).

Um programa computacional foi elaborado para cada uma das formulações mostradas na Seção 2 com o objetivo de, dado uma instância do PPLAMC, fornecer um arquivo de entrada do modelo matemático para o CPLEX. Todos os experimentos foram realizados em um computador equipado com um Pentium IV 3.0 GHz com 1.0 GB de memória RAM.

Tabela 1 – Resultados computacionais para as instâncias com 30 pontos para os três modelos matemáticos.

Instância	PPLAMC				PPLAMC ^{CT}				PPLAMC ^{MG}			
	Limite Inferior	Limite Superior	GAP (%)	Tempo (s)	Limite Inferior	Limite Superior	GAP (%)	Tempo (s)	Limite Inferior	Limite Superior	GAP (%)	Tempo (s)
30_2_0_0_85	3700	3700	0,00	0,14	3700	3700	0,00	0,67	3700	3718,06	0,49	3600
30_3_0_0_85	5390	5390	0,00	0,08	5390	5390	0,00	0,14	5390	5390,00	0,00	0,16
30_2_0_1_85	5100	5100	0,00	1,92	5100	5100	0,00	0,42	5100	5100,00	0,00	2,88
30_3_0_1_85	5390	5390	0,00	0,05	5390	5390	0,00	0,17	5390	5390,00	0,00	0,25
30_2_0_2_85	5210	5210	0,00	0,14	5210	5210	0,00	1,03	5210	5210,00	0,00	0,16
30_3_0_2_85	5390	5390	0,00	0,06	5390	5390	0,00	0,09	5390	5390,00	0,00	0,19
30_5_0_0_95	5330	5350	0,38	3600	5330	5350	0,38	3600	5330	5346,84	0,32	3600
30_6_0_0_95	5410	5470	1,11	3600	5410	5470	1,11	3600	5410	5410,00	0,00	0,39
30_3_0_1_95	5270	5270	0,00	65,31	5270	5280	0,19	307,60	5270	5270,00	0,00	77,84
30_4_0_1_95	5390	5390	0,00	2,17	5390	5390	0,00	4,84	5390	5390,00	0,00	0,03
30_2_0_2_95	4520	4520	0,00	1,22	4520	4520	0,00	2,81	4520	4539,56	0,43	3600
30_3_0_2_95	5390	5390	0,00	0,08	5390	5390	0,00	0,11	5390	5390,00	0,00	0,27
30_4_1_48_90	1920	1920	0,00	0,23	1920	1920	0,00	0,27	1920	1948,30	1,47	3600
30_5_1_48_90	2400	2400	0,00	0,23	2400	2400	0,00	8,05	2400	2435,37	1,47	3600
30_3_1_49_90	2160	2160	0,00	0,17	2160	2160	0,00	0,31	2160	2160,00	0,00	0,16
30_4_1_49_90	2880	2880	0,00	0,23	2880	2880	0,00	0,30	2880	2880,00	0,00	0,05
30_5_1_50_90	4700	4700	0,00	2,30	4700	4700	0,00	11,17	4700	4737,96	0,81	3600
30_6_1_50_90	5390	5390	0,00	204,89	5390	5390	0,00	10,55	5390	5390,00	0,00	0,12
30_5_1_40_85	3050	3050	0,00	2,05	3050	3050	0,00	3,73	3050	3086,40	1,19	3600
30_6_1_40_85	3610	3610	0,00	17,80	3610	3634	0,66	3600	3610	3684,78	2,07	3600
30_7_1_40_85	4060	4060	0,00	9,61	4060	4060	0,00	23,47	4060	4060,00	0,00	0,09
30_6_1_41_85	5330	5340	0,19	3600	5330	5340	0,19	3600	5330	5349,45	0,36	3600
30_7_1_41_85	5410	5410	0,00	61,59	5410	5470	1,11	3600	5410	5410,00	0,00	282,97
30_8_1_41_85	5470	5470	0,00	0,08	5470	5470	0,00	0,28	5470	5470,00	0,00	0,03
30_4_1_42_85	4600	4600	0,00	0,44	4600	4600	0,00	3,59	4600	4637,26	0,81	3600
30_5_1_42_85	5390	5390	0,00	7,09	5390	5390	0,00	3,00	5390	5390,00	0,00	43,89
Média	4533,08	4563,33	0,06	429,92	4533,08	4540,15	0,14	707,02	4533,08	4545,54	0,36	1454,62

As Tabelas 1 e 2 apresentam os resultados encontrados neste artigo. A primeira coluna dessas tabelas apresenta o nome da instância que indica os valores de cinco parâmetros, sendo eles: tamanho da instância, p , b , μ , φ e τ . Por exemplo, a instância 324_20_0_2_95 indica que são 324 pontos, 20 centros (facilidades), que a fila está restringida por tamanho (se o parâmetro fosse 1 a fila estaria restringida pelo tempo),

que existe um número máximo de duas pessoas na fila com probabilidade de pelo menos 95%. A coluna GAP nessas tabelas é calculada da seguinte maneira:

$$GAP(\%) = \frac{(Limitante Superior - Limitante Inferior)}{Limitante Inferior} \times 100 \quad (14)$$

Tabela 2 – Resultados computacionais para as instâncias com 324 pontos para os três modelos matemáticos.

Instância	PPLAMC				PPLAMC ^{CT}				PPLAMC ^{MG}			
	Limite Inferior	Limite Superior	GAP (%)	Tempo (s)	Limite Inferior	Limite Superior	GAP (%)	Tempo (s)	Limite Inferior	Limite Superior	GAP (%)	Tempo (s)
324_10_0_0_95	21458	21460	0,01	73,05	21459	21460	0,00	70,44	21460	21466,25	0,03	3600,00
324_10_0_1_95	35359	35360,67	0,00	257,2	35359	35360,67	0,00	285,41	35360	35366,70	0,02	3600,00
324_10_0_2_95	45387	45390	0,01	319,19	45386	45390,53	0,01	203,47	45390	45395,60	0,01	3600,00
324_10_0_0_85	37177	37180,06	0,01	371,62	37178	37180	0,01	544,91	37177	37180,64	0,01	3457,00
324_10_0_1_85	51000	51000	0,00	346,03	50995	51000	0,01	367,17	50996	51007,61	0,02	3600,00
324_10_0_2_85	59735	59740,4	0,01	180,33	59736	59740,4	0,01	666,05	59672	59743,97	0,12	3600,00
324_10_1_40_85	27698	27700	0,01	326,12	27698	27700	0,01	279,09	27690	27703,68	0,05	3600,00
324_10_1_41_85	29359	29360	0,00	248,59	29358	29360	0,01	208,28	29360	29369,44	0,03	3600,00
324_10_1_42_85	30949	30951,18	0,01	430,61	30948	30950,38	0,01	390,52	30937	30955,89	0,06	3600,00
324_10_1_48_90	26918	26920	0,01	376,64	26918	26920	0,01	282,49	26908	26922,45	0,05	3600,00
324_10_1_49_90	28329	28330	0,00	320,86	28329	28330	0,00	510,12	28327	28332,19	0,02	3600,00
324_10_1_50_90	29678	29680	0,01	229,84	29679	29680	0,00	195	29679	29685,55	0,02	3600,00
324_20_0_0_95	42916	42920	0,01	3368,45	42916	42920	0,01	3341,45	42914	42932,51	0,04	3600,00
324_20_0_1_95	70714	70720,67	0,01	3353,7	70714	70720,67	0,01	557,48	70685	70733,40	0,07	3600,00
324_20_0_2_95	90772	90780,56	0,01	3283,08	90772	90780,56	0,01	2248,61	90771	90971,19	0,22	3600,00
324_20_0_0_85	74325	74360,06	0,05	3600,00	74350	74360,06	0,01	3600,00	74307	74361,28	0,07	3600,00
324_20_0_1_85	101928	102000	0,07	3600,00	101940	102000	0,06	3600,00	101614	102015,22	0,39	3600,00
324_20_0_2_85	119365	119480,4	0,10	3600,00	119253	119480,4	0,19	3600,00	119064	119487,93	0,36	3600,00
324_20_1_40_85	55387	55400	0,02	3600,00	55391	55400	0,02	3600,00	55363	55407,36	0,08	3600,00
324_20_1_41_85	58718	58720	0,00	902,44	58715	58720	0,01	1596,55	58704	58738,89	0,06	3600,00
324_20_1_42_85	61895	61901,18	0,01	1772,06	61895	61901,17	0,01	3290,03	61887	61911,77	0,04	3600,00
324_20_1_48_90	53835	53840	0,01	3574,97	53827	53840	0,02	3600,00	53823	53844,89	0,04	3600,00
324_20_1_49_90	56649	56660	0,02	3600,00	56642	56660	0,03	3600,00	56646	56664,39	0,03	3600,00
324_20_1_50_90	59355	59360	0,01	3244,34	59355	59360	0,01	3472,66	59344	59371,10	0,05	3600,00
Média	52871,08	52883,97	0,02	1707,47	52867,21	52883,95	0,02	1671,26	52836,58	52898,75	0,08	3594,04

Considere agora a Tabela 1 que reporta os resultados para instâncias de 30 pontos de demanda. Para essas instâncias, o CPLEX apresenta bons resultados, resolvendo otimamente 23 das 26 instâncias com o modelo original de Marianov & Serra (1998), e 20 das 26 instâncias com o modelo PPLAMC^{CT}. Porém, com o modelo PPLAMC^{MG}, o CPLEX resolveu otimamente 16 das 26 instâncias. Com esses resultados, percebe-se que a formulação original de Marianov & Serra (1998) parece ser a mais adequada. Observe ainda que o CPLEX, com o modelo de Marianov & Serra (1998),

utilizou um tempo de processamento médio menor quando comparado com os outros dois modelos.

Avaliando agora a Tabela 2 que apresenta os resultados para instâncias de 324 pontos de demanda, pode-se perceber novamente que o modelo original de Marianov & Serra (1998) mostrou-se mais consistente do que as outras duas variações.

O CPLEX, com o modelo PPLAMC^{MG}, apresentou os piores limitantes superiores e inferiores. Consequentemente, o *gap* médio obtido foi inferior, em termos de qualidade, que os demais *gaps* médios.

Analisando os tempos computacionais médios, percebe-se que os dois primeiros modelos avaliados apresentam valores semelhantes. Por outro lado, o último modelo apresenta um tempo médio bem superior, próximo do tempo limite estipulado nos experimentos que foi de 3600 s.

4. Considerações finais e conclusões

Este trabalho apresentou comparações entre formulações matemáticas propostas para o Problema Probabilístico de Localização-Alocação de Máxima Cobertura (PPLAMC). O modelo proposto por Marianov & Serra (1998) foi avaliado juntamente com duas variações, conforme os trabalhos de Cornuéjols & Thizy (1982) e de Murray & Gerrard (1997). Para os testes computacionais, foram utilizadas instâncias propostas na literatura que possuem 30 e 324 pontos de demanda, com até 20 facilidades.

Os experimentos mostraram que a formulação original de Marianov & Serra (1998) é mais eficiente do que as demais em termos de tempo de processamento, *gaps* e soluções. Em termos de solução, a formulação de Marianov & Serra (1998) gera, para as maiores instâncias (324 pontos), um limitante inferior médio melhor do que as demais formulações, ou seja, considerando a função objetivo, a formulação de Marianov & Serra (1998) gera soluções que atendem a um número maior de pessoas. Por outro lado, as duas variações da formulação original podem ser utilizadas para gerar, talvez, desigualdades válidas específicas para o PPLAMC.

O *solver* de otimização utilizado nos experimentos computacionais foi o CPLEX 10. Esse aplicativo, por ser extremamente eficiente e bem avaliado pela comunidade científica, apresenta uma série de estratégias de solução que permitem ganhar tempo computacional durante o seu *branch-and-bound*. Uma destas estratégias é a criação de restrições de corte bem conhecidas como os cortes de *clique* e de *Gomory*, que

dependem, basicamente, da estrutura do modelo matemático. Acredita-se assim que a baixa performance do CPLEX com as duas últimas formulações esteja atrelada a esta geração automática de cortes, que não está sendo eficiente.

Como o PPLAMC é um problema de grande complexidade, encontra-se em estudo uma metaheurística para o mesmo. Espera-se obter resultados tão bons quanto os apresentados por Corrêa *et al.* (2009b), porém em um tempo computacional menor. Além disso, espera-se trabalhar com instâncias maiores como as propostas por García *et al.* (2009).

Agradecimentos

Glaydston Mattos Ribeiro agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (Processo 201509/2009-1) pelo suporte financeiro dado ao trabalho. Os autores agradecem aos revisores pelas ótimas sugestões fornecidas.

Referências

CHURCH, R. L.; REVELLE, C. The Maximal Covering Location Problem. **Papers of the Regional Science Association**, v. 32, n. 1, p. 101-118, 1974.

CORNUÉJOLS, G.; THIZY, J. M. Some Facets of the Simple Plant Location Polytope. **Mathematical Programming**, v. 23, n. 1, p. 50-74, 1982.

CORRÊA, F. A.; CHAVES, A. A.; LORENA, L. A. N. Hybrid Heuristics for the Probabilistic Maximal Covering Location-allocation Problem. **Operational Research: an International Journal**, v. 7, n. 3, p. 323-343, 2007.

CORRÊA, F. A.; LORENA, L. A. N. Aplicação da Relaxação Lagrangeana e do Algoritmo Genético Construtivo na Solução do Problema Probabilístico de Localização-alocação de Máxima Cobertura. **Revista Gestão & Produção**, v. 13, n. 2, p. 233-244, 2006.

CORRÊA, F. A.; LORENA, L. A. N.; RIBEIRO, G. M. Novos limitantes Lagrangeanos para o Problema Probabilístico de Localização-alocação de Máxima Cobertura utilizando Grafos de Cobertura. **Revista Gestão & Produção**, v. 16, n. 2, p.260-272, 2009a.

CORRÊA, F. A.; LORENA, L. A. N.; RIBEIRO, G. M. A Decomposition Approach for the Probabilistic Maximal Covering Location-allocation Problem. **Computers & Operations Research**, 36, 2729-2739, 2009b.

FOGLIATTI M. C.; MATTOS, N. M. C. **Teoria de Filas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2007.

GARCÍA, S.; LABBÉ, M.; MARÍN, A. Solving Large p-median Problems with a Radius Formulation. **Journal on Computing**, 2009. To appear.

ILOG. **Ilog Cplex 10.0: User's manual**. França, 2006. 478 p.

LORENA, L. A. N. Análise Espacial de Redes com aplicações em Sistemas de Informações Geográficas. **Revista Produção**, v. 3, n. 2, 2003.

MARIANOV, V.; SERRA, D. Probabilistic Maximal Covering Location-allocation Models for Congested Systems. **Journal of Regional Science**, v. 38, n. 3, p. 401-424, 1998.

MARIANOV, V.; SERRA, D. Hierarchical Location-allocation Models for Congested Systems. **European Journal of Operational Research**, v. 135, n.1, p. 195-208, 2001.

MURRAY, A. L.; GERRARD, R. A. Capacitated Service and Regional Constraints in Location-allocation Modeling. **Location Science**, v. 5, n. 2, p. 113-118, 1997.

RIBEIRO, G. M. **Relaxação Lagrangeana com divisão em clusters para alguns problemas de otimização modelados em grafos de conflitos**. Tese de Doutorado em Computação Aplicada. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. Disponível em <http://www.lac.inpe.br/~lorena/pos-grad.html>. 2007.

WOLSEY, L. A. **Integer programming**. Estados Unidos: Wiley-Interscience, 1998.

ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELS FOR THE QUEUING MAXIMAL COVERING LOCATION- ALLOCATION PROBLEM

Abstract

The Queueing Maximal Covering Location-Allocation Problem (QMCLAP) is a variation of p -medians problems that consists of locating p facilities, maximizing the number of attended users and ensuring a good level of service. The level of service is related to the parameters of the queue, i.e., waiting time and number of people waiting for service. In this problem, intervals between arrivals and services vary according to probability distributions, so it is necessary take into account concepts of the Queueing Theory. Therefore, this paper aims to evaluate mathematical models for the QMCLAP using available instances in the literature.

Key-words: *QMCLAP, p -median, Queueing Theory.*