

## CADERNOS DO IME – Série Estatística

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

Rio de Janeiro - RJ - Brasil

ISSN 1413-9022 / v. 27 p. 13 - 27, 2009

### CÁLCULO DO NMA DO GRÁFICO DE CONTROLE DE REGRESSÃO

Danilo Cuzzuol Pedrini

PPGEP/UFRGS

danilo@producao.ufrgs.br

Carla Schwengber ten Caten

PPGEP/UFRGS

tencaten@producao.ufrgs.br

#### Resumo

*Para a aplicação dos gráficos de controle (GCs), é necessário supor que os dados sejam independente e identicamente distribuídos, quando estas suposições não são satisfeitas o desempenho dos GCs é insatisfatório. Em algumas situações, como quando ocorrem muitas modificações nas variáveis de controle, essas suposições podem não ser satisfeitas. Alternativamente, existe o gráfico de controle de regressão, que consiste no ajuste de um modelo de regressão que relacione a característica de qualidade às variáveis de controle e o posterior monitoramento da mesma em relação ao valor previsto pelo modelo. Este artigo utiliza a simulação de Monte Carlo para obter o Número Médio de Amostras (NMA) para o gráfico de controle de regressão apresentado por Pedrini et al. (2008), além de comparar com outros gráficos similares encontrados na literatura. Os resultados encontrados mostram que o gráfico de controle de regressão apresenta um desempenho satisfatório, sobretudo quando comparado com os demais gráficos.*

**Palavras-chave:** Gráfico de Controle de Regressão; NMA; Método de Monte Carlo.

## 1. Introdução

Os gráficos de controle são o principal destaque dentre as ferramentas do CEP, devido principalmente à sua simplicidade operacional e efetividade na detecção de problemas no processo, sendo utilizadas com sucesso no monitoramento do desempenho dos mais diversos processos industriais. De acordo com Montgomery (2004), a utilização dos gráficos de controle requer que os dados monitorados sejam independentes e identicamente distribuídos.

Estas suposições podem não ser satisfeitas quando há alterações no ajuste das variáveis de controle do processo, pois nesse caso, ocorre uma alteração na média e/ou variabilidade dos dados, alterando conseqüentemente a distribuição destes. Nesse caso, seria necessário um gráfico de controle para cada ajuste, o que em muitos casos pode não ser possível devido ao baixo número de amostras disponíveis em cada ajuste do processo. Para esta situação, a característica de qualidade de um produto ou processo pode ser melhor representada pelo seu relacionamento com as variáveis de controle do processo (JACOBI *et al.*, 2002; SHU *et al.*, 2007).

Para solucionar este problema, Mandel (1969) propôs o gráfico de controle de regressão, que consiste na combinação das técnicas de gráfico de controle e modelos de regressão linear. Este gráfico de controle, somente pode ser aplicado em processos que apresentem uma variável de controle, inviabilizando a aplicação em vários processos industriais. Para solucionar este viés, Haworth (1996) propôs o gráfico de controle de regressão múltipla, que permite o monitoramento de processos que apresentem mais de uma variável de controle.

Recentemente, Pedrini *et al.* (2008) propuseram uma modificação ao gráfico de controle de regressão múltipla de Haworth (1996), apresentando também uma sistemática para aplicação deste gráfico de controle. Estes autores não apresentaram estudos de sensibilidade do gráfico proposto às alterações no processo.

Dessa forma, o presente trabalho tem como objetivo obter o Número Médio de Amostras (NMA) para o gráfico de controle de regressão proposto por Pedrini *et al.* (2008), além de comparar o desempenho deste gráfico com outros gráficos similares encontrados na literatura.

## 2. Revisão Bibliográfica

### 2.1 Gráfico de Controle de Regressão

De acordo com Cai *et al.* (2002) e Montgomery (2004), o gráfico de controle de regressão pode ser utilizado para monitorar processos que apresentem tendências, que ocorrem devido à interferência de variáveis de controle do processo, como por exemplo, o desgaste de ferramentas. Loredon *et al.* (2003) e Montgomery (2004) também apontam o uso do gráfico de controle de regressão em processos autocorrelacionados, pois se o conjunto apropriado de variáveis de controle for inserido no modelo de regressão, os resíduos serão não-correlacionados, mesmo que a variável resposta seja correlacionada.

Para o gráfico de controle de regressão, o valor ótimo para a característica de qualidade é representado pelo valor estimado pelo modelo, dados os valores das variáveis de controle. Dessa forma, a linha central deste gráfico é o valor previsto pelo modelo estimado e os limites de controle são posicionados paralelamente afastados  $k$  desvios-padrão da LC, conforme equações (1), (2) e (3).

$$LSC_i = \hat{Y}_i + k\hat{\sigma}_e \quad (1)$$

$$LC_i = \hat{Y}_i \quad (2)$$

$$LIC_i = \hat{Y}_i - k\hat{\sigma}_e \quad (3)$$

onde  $\hat{Y}_i = \mathbf{x}_i \hat{\boldsymbol{\beta}}$

O valor da constante  $k$  utilizado varia entre 2 e 3, conforme a sensibilidade e taxa de alarmes falsos desejada para o gráfico de controle de regressão. A estimativa do desvio-padrão do gráfico de controle de regressão é dada pelo desvio-padrão do modelo de regressão estimado (MANDEL, 1969; JACOBI *et al.*, 2002), conforme equação (4).

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-p} = \frac{SQR}{n-p} = QMR \quad (4)$$

onde  $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$

O procedimento proposto por Mandel (1969) restringe-se a modelos de regressão linear simples, ou seja, processos que apresentem apenas uma variável de controle. Dessa forma, Haworth (1996) modificou o gráfico de controle de regressão de forma a poder ser utilizado em processos que apresentem mais de uma variável de controle significativa para explicar a característica de qualidade.

O procedimento proposto por Haworth (1996) consiste no monitoramento dos resíduos padronizados do modelo. Os limites de controle e linha central para o gráfico

de controle de regressão múltipla proposto por Haworth (1996) são baseados no valor da estatística  $t$ , com nível de significância  $\alpha/2$  e  $n-p$  graus de liberdade.

Loredo *et al.* (2002) e Shu *et al.* (2004) também propuseram alternativas que permitem o uso de modelos de regressão linear múltipla. No primeiro trabalho, utiliza-se a amplitude móvel dos resíduos para estimar o desvio-padrão do gráfico de controle de regressão. Shu *et al.* (2004) apresentam o gráfico EWMAREG, que consiste no monitoramento dos resíduos padronizados através de um gráfico de controle de médias móveis exponencialmente ponderadas. Os procedimentos apresentados por Haworth (1996), Loredo *et al.* (2002) e Shu *et al.* (2004) apresentam a vantagem adicional de preservar a ordem temporal dos dados, o que permite a realização de todos os testes de estabilidade apresentados em Montgomery (2004).

Pedrini *et al.* (2008) modificaram o gráfico de controle de regressão múltipla, de forma a possibilitar o monitoramento direto da característica de qualidade, ao invés do monitoramento dos resíduos padronizados. Esta modificação proposta pelos autores visa facilitar a aplicação do gráfico de controle em processos produtivos, já que o conceito de resíduos não é de fácil assimilação por parte dos operadores do processo. Os limites de controle para o gráfico de controle de regressão proposto por Pedrini *et al.* (2008) são apresentados nas equações (5), (6) e (7).

$$LSC_j = \hat{y}_j + 3\sqrt{QMR(1 + h_{jj})} \quad (5)$$

$$LC_i = \hat{y}_i \quad (6)$$

$$LIC_j = \hat{y}_j - 3\sqrt{QMR(1 + h_{jj})} \quad (7)$$

onde  $h_{jj} = x_j'(X'X)^{-1}x_j$

O termo dentro da raiz é um fator de correção para o intervalo de confiança para a previsão do modelo de regressão, já que  $h_{ii}$  é penalização para o afastamento das variáveis de controle em relação ao centro do elipsóide formado por todos os valores das variáveis de controle utilizadas para estimar o modelo de regressão. Ressalta-se que à medida que os dados utilizados se afastam do centro deste elipsóide, a qualidade da previsão do modelo piora.

Alguns exemplos de aplicação do gráfico de controle de regressão são apresentados por Rothschild e Roth (1986), Olin (1998), Omura e Steffe (2003) e Casarin *et al.* (2007).

Também são encontrados na literatura alguns procedimentos similares ao gráfico de controle de regressão, como: o gráfico de controle para seleção de causas, proposto por Zhang (1985), o gráfico de controle baseados em variáveis ajustadas por modelos de regressão de Hawkins (1991) e os procedimentos para monitoramento de perfis lineares, estudados inicialmente por Kang e Albin (2000).

## 2.2 Número Médio de Amostra

A efetividade na detecção de causas especiais está diretamente ligada à escolha dos limites de controle, do intervalo de amostragem, do tamanho da amostra e da escolha das regras sensibilizantes. Segundo Costa *et al.* (2005), uma medida de sensibilidade de um gráfico de controle é o número médio de amostras até o sinal (NMA), que é o número de amostras que devem ser coletadas até que o processo indique uma condição de processo fora de controle.

Quando o processo está sob controle estatístico, o  $NMA_0$  indica o número médio de pontos necessários para a ocorrência do primeiro alarme falso do gráfico de controle. Quando o processo está fora de controle, o  $NMA_1$  indica o número de amostras necessárias para a detecção da ocorrência da alteração na estatística monitorada (COSTA *et al.*, 2005).

Assim, quando se projeta um gráfico de controle, deseja-se que o  $NMA_0$  seja o maior possível, pois este é um indício de que serão necessárias poucas interrupções no processo quando este está sob controle estatístico, e que o  $NMA_1$  seja o menor valor possível, já que este valor está diretamente relacionado ao tempo necessário para a detecção de uma causa especial (MONTGOMERY, 2004; COSTA *et al.*, 2005). De forma geral, para um gráfico de controle de Shewhart, o  $NMA_0$  pode ser expresso como o inverso da probabilidade de um ponto estar fora de controle, conforme equação (8).

$$NMA_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (8)$$

O  $NMA_1$  pode ser escrito em função da probabilidade de erro tipo II, que é a probabilidade do gráfico não detectar uma alteração na estatística monitorada quando o processo está fora de controle estatístico (MONTGOMERY, 2004).

$$NMA_1 = \frac{1}{1 - \beta} \quad (9)$$

Quando a característica de qualidade monitorada apresenta distribuição conhecida e independente, os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser obtidos pelo uso de simulação de Monte Carlo ou de Cadeias de Markov.

### 3. Método Adotado para Simulação

O método de simulação de Monte Carlo será utilizado para calcular o NMA para gráfico de controle de regressão proposto por Pedrini *et al.* (2008). Os resultados obtidos serão comparados com os resultados do gráfico de controle de regressão múltipla proposto por Haworth (1996) e para o gráfico de controle com limites calculados através da amplitude móvel dos resíduos proposto por Loredó *et al.* (2002). Para maiores informações sobre o método de Monte Carlo, recomenda-se Bremaud (1999) e Casella e Robert (2004). Em todos os casos utiliza-se o programa R para o cálculo do NMA de cada método.

O primeiro passo da simulação consiste na geração da amostra a ser monitorada pelos gráficos de controle que serão analisados. Dessa forma, gerou-se 5 mil dados para cada variável de controle, com exceção de  $x_2$ , que será simulada como sendo uma variável discreta: serão gerados apenas os valores -1 e 1, sem incluir valores intermediários. O restante das variáveis de controle, por serem contínuas, foram modeladas segundo uma distribuição uniforme, cujos valores possuem a mesma probabilidade de ocorrência, com valor mínimo de -1 e valor máximo de +1. Para compor o erro aleatório, gera-se um vetor composto por 5 mil valores de uma distribuição normal com média 0 e desvio-padrão 22,1.

Para a simulação de um processo sob controle, utiliza-se o modelo estimado na Fase I do método proposto por Pedrini *et al.* (2008) para gerar a previsão da característica de qualidade dado cada conjunto de valores das variáveis de controle. A seguir, soma-se o resíduo aleatório, de forma a constituir o valor simulado da característica de qualidade.

No caso da simulação de um processo fora de controle, altera-se a equação do modelo de regressão conforme a modificação desejada e, ao se somar os resíduos aleatórios a este resultado, gera-se o vetor de valores simulados da característica de qualidade. Segundo Shu *et al.* (2004), a modificação dos coeficientes do modelo de regressão pode alterar a média e o desvio-padrão dos resíduos, conforme apresentado nas equações (10) e (11), respectivamente.

$$E(e) = (\beta_0 - \hat{\beta}_0) + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)\mu_{x_1} + (\beta_2 - \hat{\beta}_2)\mu_{x_2} + \dots + (\beta_k - \hat{\beta}_k)\mu_{x_k} \quad (10)$$

$$V(e) = (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 \sigma_{x_1}^2 + (\beta_2 - \hat{\beta}_2)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + (\beta_k - \hat{\beta}_k)^2 \sigma_{x_k}^2 + \sigma^2 \quad (11)$$

Onde:  $\hat{\beta}_k$  é o valor estimado do k-ésimo coeficiente de regressão e  $\beta_k$  é o valor alterado do k-ésimo coeficiente de regressão

Quando um ponto fora de controle é detectado pelo gráfico de controle, o contador C(i), recebe o número da amostra fora de controle. Repetindo-se todo o procedimento descrito anteriormente 5 mil vezes é possível calcular o NMA através da equação (12).

$$NMA = \frac{\sum_{i=1}^n iC(i)}{5000} \quad (12)$$

### 3.1 Alterações Estudadas

Além da situação de processo sob controle estatístico, foram simuladas três situações de processos fora de controle: (i) alterações no coeficiente de intercepto  $\beta_0$ , com os coeficientes de inclinação constantes; (ii) alterações no coeficiente de inclinação  $\beta_1$ , com os demais coeficientes de regressão mantidos constantes e (iii) alterações nos coeficientes  $\beta_0$  e  $\beta_1$ , com os demais coeficientes de inclinação mantidos constantes. As explicações dos motivos destas alterações são baseadas nas equações (14) e (15) e serão informados a seguir.

Analisando estas equações, uma alteração no coeficiente de intercepto  $\beta_0$  visa alterar a média dos valores simulados da característica de qualidade e, conseqüentemente, a média dos resíduos do modelo, mas mantendo o desvio-padrão dos resíduos constante. Dessa forma, a primeira situação simulada visa analisar isoladamente a sensibilidade do gráfico de controle de regressão proposto às modificações na média dos valores observados em relação aos valores estimados pelo modelo de regressão estimado na Fase I do método proposto, já que apenas a média dos resíduos é alterada, enquanto a variância permanece constante.

De acordo com as equações (10) e (11), uma alteração em um coeficiente de inclinação  $\beta_k$  altera a variância dos resíduos do modelo de regressão e, se a média da variável de controle  $x_k$  não for igual a zero, altera também a média dos resíduos. Como as variáveis de controle simuladas apresentam média igual a zero, uma alteração em qualquer coeficiente de inclinação altera apenas o desvio-padrão, que é o objetivo da segunda situação de processo fora de controle.

Para a terceira situação fora de controle simulada, altera-se simultaneamente o coeficiente de intercepto  $\beta_0$  e o coeficiente de inclinação  $\beta_1$ , visando assim, verificar a sensibilidade do gráfico de controle proposto às alterações conjuntas da média e desvio-padrão dos resíduos. Ressalta-se que em todas essas situações, as alterações nos coeficientes são planejadas em valores múltiplos do desvio-padrão dos resíduos estimado na aplicação da Fase I do método proposto.

#### 4. Resultados

Na Tabela 1 apresentam-se os valores do NMA, obtidos através da simulação, para o processo sob controle e para as alterações do coeficiente de intercepto  $\beta_0$  do modelo de regressão, para o gráfico de controle proposto, para o gráfico de medidas individuais para os resíduos, para o gráfico de controle de regressão múltipla proposto por Haworth (1996).

TABELA 1 – Valores NMA para alterações no coeficiente de intercepto.			
Alteração	Método Proposto	Medidas Individuais	Haworth (1996)
Sob controle	576,75	736,63	2083,85
$\beta_0+0,5\sigma_e$	226,31	281,43	690,58
$\beta_0+1,0\sigma_e$	60,13	72,20	158,33
$\beta_0+1,5\sigma_e$	19,47	22,74	43,58
$\beta_0+2,0\sigma_e$	7,81	8,82	14,98
$\beta_0+2,5\sigma_e$	3,83	4,16	6,28
$\beta_0+3,0\sigma_e$	2,24	2,40	3,19
$\beta_0+3,5\sigma_e$	1,54	1,60	2,00
$\beta_0+4,0\sigma_e$	1,24	1,27	1,44

Para a situação de processo sob controle, maiores valores do  $NMA_0$  indicam menores taxas de alarmes falsos do gráfico de controle, ou seja, um menor número de intervenções desnecessárias no processo serão realizadas. Mas, altos valores do  $NMA_0$  também podem indicar uma relativa ineficiência do gráfico de controle, já que os limites de controle podem estar muito largos.

Assim, analisando a Tabela 1, o gráfico de controle de regressão múltipla proposto por Haworth (1996) apresentou o maior  $NMA_0$  e, por conseguinte, a menor taxa de alarmes falsos. Isto ocorreu porque este gráfico apresentou os limites de controle



mais largos. De forma contrária, o gráfico EWMAREG apresentou o menor  $NMA_0$  entre os gráficos estudados, com valores  $NMA_0$  ligeiramente inferiores a 370. O gráfico de controle para medidas individuais, com limites de controle estimados pela amplitude móvel dos resíduos, apresentou um  $NMA_0$  de aproximadamente 730, já que o uso deste método forneceu limites de controle um pouco maiores que o gráfico de controle proposto.

O gráfico de controle de regressão proposto apresentou um  $NMA_0$  de aproximadamente 572, isto equivale dizer que o gráfico de controle de regressão proposto apresentará, em média, um alarme falso a cada 572 amostras monitoradas. Este desempenho foi considerado satisfatório, embora seja superior ao  $NMA_0$  de um gráfico de controle de Shewhart. O principal motivo para este valor do  $NMA_0$  é o uso do termo  $h_{ij}$  como fator de correção nos limites de controle do método proposto, este também é o fator de correção utilizado para o cálculo de intervalos de confiança para a previsão de novas observações da característica de qualidade. Caso este fator de correção não fosse utilizado, amostras com valores extremos para as variáveis de controle teriam limites de controle mais rígidos e o nível de confiança, implicitamente adotado quando se escolhe a constante  $k$  para os limites de controle, não seria constante para todos os valores monitorados.

Analisando as alterações no coeficiente de intercepto  $\beta_0$ , é possível observar que o gráfico de controle de regressão múltipla de Haworth (1996) apresenta um desempenho bastante ruim, quando comparado com os demais gráficos de controle estudados. O NMA deste gráfico somente fica próximo dos demais para mudanças superiores a  $3\sigma_e$  na média de  $\beta_0$ . Para mudanças na média de  $\beta_0$  inferiores a  $2,5\sigma_e$ , o gráficos EWMAREG apresentou desempenho superior aos dos demais gráficos, embora apresentem um  $NMA_0$  um pouco menor, o que indica uma taxa de alarmes falsos superior aos dos demais gráficos.

Para alterações na média de  $\beta_0$  superiores a  $2,5\sigma_e$ , o gráfico de controle de regressão proposto apresenta o melhor desempenho entre todos os gráficos de controle estudados. O gráfico de controle para medidas individual aplicado aos resíduos apresenta um desempenho muito próximo ao gráfico de controle proposto, embora apresente um  $NMA_1$  maior. Isto indica uma proximidade entre o uso das duas técnicas de controle estatístico.

Na Tabela 2, apresentam-se os valores do  $NMA_1$  para as alterações do coeficiente de inclinação  $\beta_1$  dos gráficos de controle de regressão proposto, do gráfico de medidas individuais para os resíduos e do gráfico de controle de regressão múltipla proposto por Haworth (1996).

TABELA 2 – Valores NMA para alterações no coeficiente de inclinação  $\beta_1$ .

Alteração	Método Proposto	Medidas Individuais	Haworth (1996)
Sob controle	576,75	736,63	2083,85
$\beta_1+0,5\sigma_e$	393,17	488,31	1311,10
$\beta_1+1,0\sigma_e$	172,59	204,02	502,31
$\beta_1+1,5\sigma_e$	71,90	82,10	180,61
$\beta_1+2,0\sigma_e$	32,03	35,69	70,00
$\beta_1+2,5\sigma_e$	16,04	17,52	30,71
$\beta_1+3,0\sigma_e$	9,10	9,79	15,46
$\beta_1+3,5\sigma_e$	5,82	6,18	8,90
$\beta_1+4,0\sigma_e$	4,14	4,35	5,78

Analisando a Tabela 2, observa-se que o desempenho do gráfico de controle de regressão proposto por Haworth (1996) é novamente bastante inferior aos dos demais gráficos estudados. Neste caso, o gráfico de controle proposto apresenta  $NMA_1$  sempre menos que o gráfico de controle de medidas individuais, especialmente para alterações inferiores a  $2,5\sigma_e$  na média de  $\beta_1$ .

Os resultados da Tabela 2 mostram que estes três gráficos apresentados não são adequados para a detecção de mudanças no desvio-padrão dos resíduos do modelo. A principal razão para este fraco desempenho é que estes gráficos foram projetados especificamente para detectar alterações na média do valor observado em relação ao valor previsto pelo modelo e não para detectar mudanças no desvio-padrão. Isto indica a necessidade do desenvolvimento de procedimentos para detectar alterações no desvio-padrão do processo, quando este é monitorado por um gráfico baseado no gráfico de controle de regressão ou algum outro gráfico similar.

Na Tabela 3 apresentam-se os valores do  $NMA_1$  para as alterações simultâneas do coeficiente de intercepto  $\beta_0$  e do coeficiente de inclinação  $\beta_1$  dos gráficos de controle de regressão proposto, do gráfico de medidas individuais para os resíduos e do gráfico de controle de regressão múltipla proposto por Haworth (1996).

TABELA 3 – Valores NMA para alterações simultâneas nos coeficientes  $\beta_0$  e  $\beta_1$ .

Alterações	Método Proposto	Medidas Individuais	Haworth (1996)
$\beta_0+0,5\sigma_e$	$\beta_1+0,5\sigma_e$	170,01	205,35
	$\beta_1+1,0\sigma_e$	89,99	104,08
	$\beta_1+1,5\sigma_e$	43,75	49,36
	$\beta_1+2,0\sigma_e$	22,54	24,89
	$\beta_1+2,5\sigma_e$	12,72	13,79
	$\beta_1+3,0\sigma_e$	7,92	8,47
$\beta_0+1,0\sigma_e$	$\beta_1+0,5\sigma_e$	49,40	57,98
	$\beta_1+1,0\sigma_e$	31,36	35,73
	$\beta_1+1,5\sigma_e$	18,82	20,87
	$\beta_1+2,0\sigma_e$	11,84	12,87
	$\beta_1+2,5\sigma_e$	8,00	8,56
	$\beta_1+3,0\sigma_e$	5,82	6,16
$\beta_0+1,5\sigma_e$	$\beta_1+0,5\sigma_e$	17,11	19,57
	$\beta_1+1,0\sigma_e$	12,63	14,12
	$\beta_1+1,5\sigma_e$	8,95	9,78
	$\beta_1+2,0\sigma_e$	6,80	7,06
	$\beta_1+2,5\sigma_e$	5,11	5,41
	$\beta_1+3,0\sigma_e$	4,20	4,40
$\beta_0+2,0\sigma_e$	$\beta_1+0,5\sigma_e$	7,20	8,03
	$\beta_1+1,0\sigma_e$	6,05	6,63
	$\beta_1+1,5\sigma_e$	4,93	5,31
	$\beta_1+2,0\sigma_e$	4,10	4,35
	$\beta_1+2,5\sigma_e$	3,54	3,71
	$\beta_1+3,0\sigma_e$	3,17	3,30
$\beta_0+2,5\sigma_e$	$\beta_1+0,5\sigma_e$	3,67	3,99
	$\beta_1+1,0\sigma_e$	3,39	3,65
	$\beta_1+1,5\sigma_e$	3,09	3,28
	$\beta_1+2,0\sigma_e$	2,83	2,98
	$\beta_1+2,5\sigma_e$	2,64	2,75
	$\beta_1+3,0\sigma_e$	2,51	2,60
$\beta_0+3,0\sigma_e$	$\beta_1+0,5\sigma_e$	2,22	2,36
	$\beta_1+1,0\sigma_e$	2,19	2,31
	$\beta_1+1,5\sigma_e$	2,16	2,26
	$\beta_1+2,0\sigma_e$	2,12	2,21
	$\beta_1+2,5\sigma_e$	2,10	2,17
	$\beta_1+3,0\sigma_e$	2,08	2,14

Como é possível observar na Tabela 3, para alterações simultâneas em  $\beta_0$  e  $\beta_1$ , o gráfico de controle proposto possui melhor desempenho, isto é, um  $NMA_1$  menor, que os demais gráficos estudados em todas as situações simuladas. Quando comparado com

o gráfico de controle para medidas individuais aplicado aos resíduos do modelo de regressão, o gráfico de controle proposto é notoriamente superior em mudanças inferiores a  $1,5\sigma_e$  na média de  $\beta_0$  e  $\beta_1$ , sendo que a partir desta faixa de alteração, o desempenho destes gráficos se torna bastante similar. Para todas as faixas de alteração em  $\beta_0$ , com alterações acima de  $2,5\sigma_e$  em  $\beta_1$ , o gráfico do método proposto e o de medidas individuais para os resíduos apresentam desempenhos muito próximos.

Analisando a Tabela 3, também é possível observar que o gráfico de controle de regressão múltipla de Haworth (1996) possui desempenho muito inferior a esses dois gráficos. Este gráfico só apresenta desempenho próximo aos dos demais gráficos em situações de grandes alterações nos coeficientes de regressão  $\beta_0$  e  $\beta_1$ .

Dessa forma, o gráfico de controle proposto apresentou um bom desempenho para a detecção de mudanças isoladas no coeficiente de intercepto  $\beta_0$  e em mudanças simultâneas nos coeficientes de regressão  $\beta_0$  e  $\beta_1$ . Para mudanças simuladas no coeficiente de inclinação  $\beta_1$ , que neste caso acarretavam especificamente em alterações multiplicativas no desvio-padrão dos resíduos, o gráfico de controle proposto teve um desempenho razoável, embora superior ao dos outros gráficos estudados.

## 5. Conclusões

O presente trabalho teve como objetivo obter o Número Médio de Amostras (NMA) para o gráfico de controle de regressão proposto por Pedrini *et al.* (2008), além de comparar o desempenho deste gráfico com outros gráficos similares encontrados na literatura. Dessa forma, utilizou-se a simulação de Monte Carlo para calcular o NMA do gráfico de controle de regressão proposto por Pedrini *et al.* (2008).

Analisando os valores obtidos para o  $NMA_0$  do gráfico de controle proposto, observa-se que este possui uma baixa ocorrência de alarmes falsos. Para a simulação de alterações isoladas no coeficiente de intercepto  $\beta_0$ , o gráfico de controle de regressão proposto apresentou um bom desempenho, sobretudo para mudanças acima de  $2,5\sigma_e$  em  $\beta_0$ , quando foi superior a todos os outros gráficos de controle estudados. Desta forma, o gráfico de controle proposto possui uma boa sensibilidade para a detecção de grandes mudanças na média do coeficiente de intercepto e, por consequência, uma boa sensibilidade às diferenças entre o valor observado e o valor previsto pelo modelo de regressão.

Para alterações isoladas no coeficiente de inclinação  $\beta_1$ , o gráfico de controle de regressão proposto não apresentou um bom desempenho, embora melhor que os demais gráficos de controle. Lembrando que, como a variável de controle  $x_1$ , possui média igual a zero, alterações em  $\beta_1$  somente alteram o desvio-padrão dos resíduos, sem alterar a média destes. Este resultado pode ser explicado pelo fato do gráfico de controle de regressão ter sido desenvolvido para detectar apenas mudanças na média.

No caso de mudanças simultâneas em um coeficiente de inclinação e no coeficiente de intercepto, que acarretam numa alteração conjunta da média e desvio-padrão dos resíduos, o NMA do gráfico de controle de regressão possui um bom desempenho, sempre melhor que os demais gráficos estudados.

Como sugestão a trabalhos futuros, recomenda-se a proposta de um gráfico de controle auxiliar para monitorar a variabilidade dos resíduos, combinado com o gráfico de controle de regressão, e a obtenção do NMA para este novo gráfico de controle. Outra proposta interessante é a obtenção do NMA para o gráfico de controle de regressão com testes complementares, através de Cadeias de Markov.

## Referências

- ALWAN, L. C.; ROBERTS, H. V. Time-Series Modeling for Statistical Process Control. **Journal of Business & Economic Statistics**, v. 6, n. 1, p. 87-95, 1988.
- BREMAUD, P. **Markov chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues**. New York: Springer, 1999, 444 p.
- CASARIN, V. A.; SOUZA, A. M.; BOHM, S. I. H.; JACOBI, L. F. **Aplicação de gráficos de controle de regressão no monitoramento do processo de montagem de colheitadeiras**. Foz do Iguaçu: XXVII Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 2007.
- CASELLA, G.; ROBERT, C.P. **Monte Carlo Statistical Methods**. New York: Springer, 2ª Edição, 2004, 645 p.
- CAI, D. Q.; XIE, M.; GOH, T. N.; TANG, X. Y. Economic Design of Control chart for Trended Process. **International Journal of Production Economics**, v. 79, p. 85-92, 2002.
- COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle Estatístico de Qualidade**. São Paulo: Editora Atlas, 2ª Edição, 2005, 334 p.
- HAWKINS, D. M. Multivariate quality control based on regression-adjusted variables. **Technometrics**, v. 33, n. 1, p. 61-75, 1991.
- HAWORTH, D. A. Regression control chart to manage software maintenance. **Journal of Software Maintenance**, v. 8, n. 1, p. 35-48, 1996.
- JACOBI, L. F.; SOUZA, A. M.; PEREIRA, J. E. S. Gráfico de controle de regressão aplicado na monitoração de processos. **Revista Produção**, v. 12, n. 1, p. 46-59, 2002.
- KANG, L.; ALBIN, S. On-line monitoring when the process yields linear profiles. **Journal of Quality Technology**, v. 32, n. 4, p. 418-426, 2000.

- LOREDO, E. N.; JERKPAPORN, D.; BORROR, C. M. Model-based control chart for autoregressive and correlated data. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 18, n. 6, p. 489-496, 2002.
- MANDEL, B. J. The regression control chart. **Journal of Quality Technology**, v. 1, n. 1, p. 1-9, 1969.
- MONTGOMERY, D. C. **Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade**. 4. Ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 513 p, 2004.
- OLIN, B D. **Regression control charts revisited: methodology and Cases Studies**. New York: 42° Annual Fall Technical Conference (AFTC), 1998.
- OMURA, A. P.; STEFFE, J. H. Mixer viscometry to characterize fluid foods with large particulates. **Journal of Food Process Engineering**, v. 26, n. 3, p. 435-445, 2003.
- PEDRINI, D. C.; CATEN, C. S. ten, MOREIRA Jr., F. J. Proposal of a modification on control charts based on residuals. **Annals of III International Symposium on Business and Industrial Statistics (ISBIS)**, 2008.
- ROTHSCHILD, B. F.; ROTH, S. R. Statistical process control of plating solutions with regression control charts. **The SAMPE Journal**, v. 22, n. 5, p. 37-41, 1986.
- SHU, L; TSUNG, F; TSUI, K. L. Run-length performance of regression control charts with estimated parameters. **Journal of Quality Technology**, v. 36, n. 3, p. 280-292, 2004.
- SHU, L; TSUI, K. L.; TSUNG, F. A review of regression control charts. In: Ruggeri, F.; Faltin, F.; Kenett, R. **Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability** New York: John Wiley & Sons, p. 1569-1573, 2007.
- ZHANG, G. X. Cause-selecting control charts – a new type of quality control charts. **The QR Journal**, v. 12, n. 4, p. 221-225, 1985.

## THE ARL DISTRIBUTION OF A REGRESSION CONTROL CHART

### **Abstract**

*In the application of Control Charts, it's supposed that the data is independent and identically distributed. When some modifications on control variables occurs, those assumptions cannot be true and the performance of the control charts is affected. As a solution, that is the regression controle chart, which consists in the adjusting of a regression model, relating the response variable to the control variables, and the following monitoring of the observed value against the predicted value of the response. The present work uses the Monte Carlo simulation to calculate the Average Run Length (ARL) of the regression control chart presented by Pedrini et al. (2008), comparing the result obtained against others procedures of the literature. The work results shows taht the regression control chart has a good perfomance.*

**Key-words:** *Regression Control Chart, ARL, Monte Carlo simulation.*